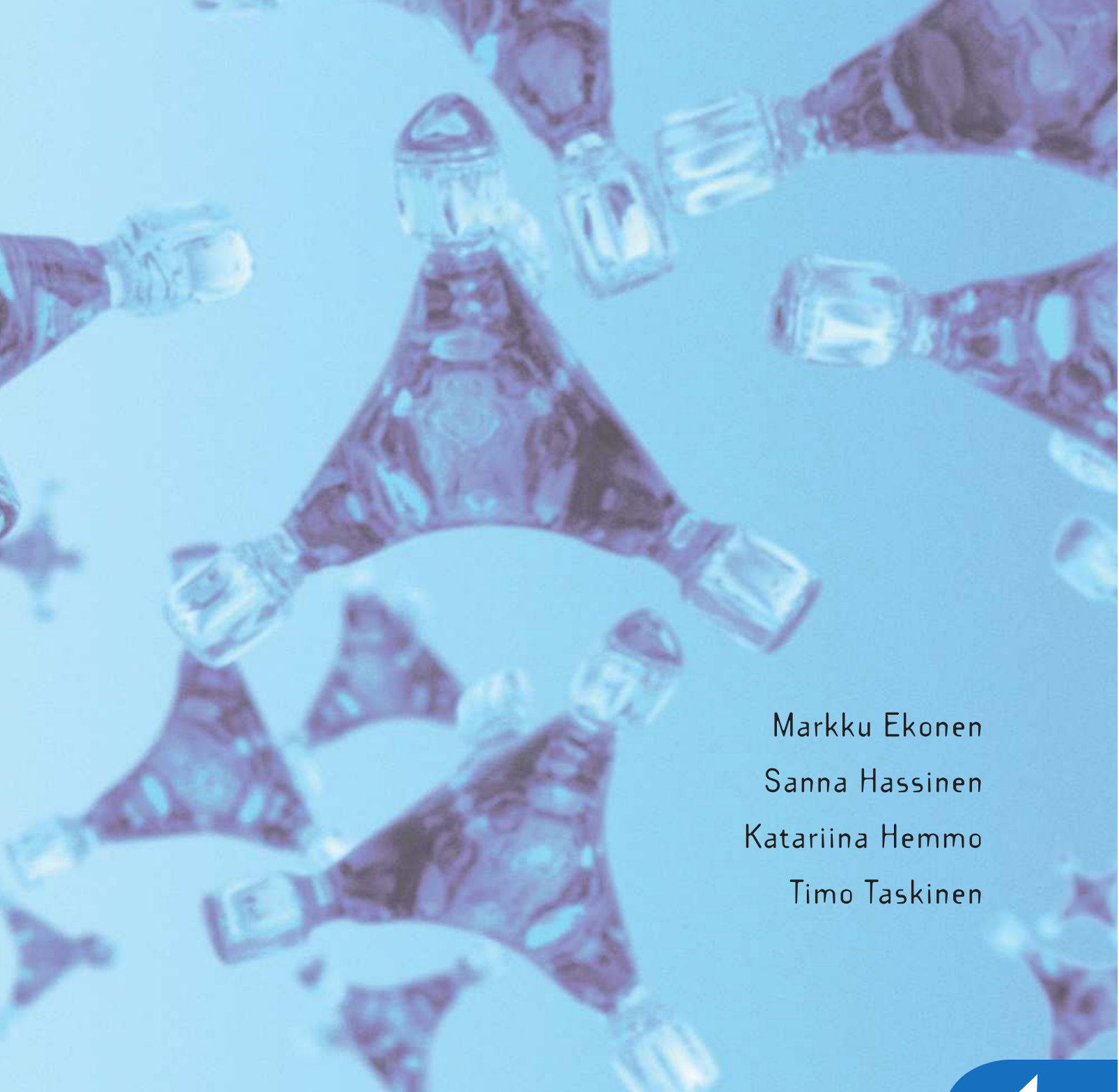


Markku Ekonen
Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

LUKION LYHYT MATEMATIIKKA 1

# SIGMA

## Lausekkeet ja yhtälöt

Sanoma Pro Oy • Helsinki

**Tiedustelut**
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-0325-3 Sigma 1

12 kk lisenssi ISBN978-952-63-1949-0
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1950-6

Toimitus: Sanna Mäkitalo
Typografia: Riitta Piuva
Taitto: Tmi Sivunvalmistus Pirjo Seppä
Kansi: Riitta Piuva
Kannen kuva: Getty Images
Piirrokset: Pekka Könönen ja Eila Sinivuori

© Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen
ja Sanoma Pro Oy

**Kopiointiehdot**
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

# Sisällys


**1 Luvut ja niillä laskeminen** ..... 7

1.1 Lukujoukot ja laskutoimitukset ..... 7
Tehtäviä ..... 15
1.2 Murtoluvuilla laskeminen ..... 18
Tehtäviä ..... 22
1.3 Potenssien laskusäännöt ..... 24
Tehtäviä ..... 31
Keskeisiä käsitteitä ..... 34

**2 Lausekkeilla laskeminen** ..... 35

2.1 Lauseke ja laskutoimitukset ..... 35
Tehtäviä ..... 41
2.2 Polynomi ..... 44
Tehtäviä ..... 51
2.3 Murtolausekkeita ..... 54
Tehtäviä ..... 58
Keskeisiä käsitteitä ..... 60

**3 Yhtälöt** ..... 61

3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö ..... 61
Tehtäviä ..... 68
3.2 Vaillinainen toisen asteen yhtälö ..... 71
Tehtäviä ..... 76
3.3 Täydellinen toisen asteen yhtälö ..... 79
Tehtäviä ..... 82
3.4 Toisen asteen yhtälön sovelluksia ..... 84
Tehtäviä ..... 88
Keskeisiä käsitteitä ..... 90

**4 Verrannollisuus** ..... 91

4.1 Suhde ja verranto ..... 91
Tehtäviä ..... 95
4.2 Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet ..... 97
Tehtäviä ..... 102
Keskeisiä käsitteitä ..... 106

**5 Prosenttilaskenta** ..... 107

5.1 Prosenttilaskennan perustilanteita ..... 107
Tehtäviä ..... 116
5.2 Prosenttiyhtälöitä ..... 120
Tehtäviä ..... 125
Keskeisiä käsitteitä ..... 128

**6 Kertausosa** ..... 129

**7 Ekstrat** ..... 140

**Tehtävien vastaukset** ..... 157

Hakemisto ..... 168

# Kirjan käyttäjälle

Matematiikan opetuksen tarkoituksena on rohkaista opiskelijaa oivaltavaan oppimiseen, kehittää matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisutaitoa. Sigman rakenne tukee näiden tavoitteiden toteutumista.

**Pohdinta**

Osa kirjan alaluvuista alkaa pohdintatehtävillä. Niiden tarkoituksena on yleensä johdatella opetettavaan aiheeseen ja herättää kysymyksiä. Opettaja voi käyttää tehtäviä osana opetusta, tai opiskelija voi tutustua tehtäviin itsenäisesti.

**Teoria**

Teoria on jaettu aihekokonaisuuksiin sivuotsikoiden avulla. Näin eri osa-alueet löytyvät helpommin. Suuremmat kokonaisuudet voidaan otsikoiden avulla jakaa sopiviin opetuskokonaisuuksiin.

**Tehtävät**

Tehtävät on koottu teorian mukaisten sivuotsikoiden avulla kokonaisuuksiksi, joista on helppo valikoida sopivat tehtävät aihepiirin ja vaikeusasteen mukaan.

120. Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla.

E1 Joidenkin harjoitustehtävien edessä olevan esimerkkiviittauksen tarkoituksena on tukea harjoittelemista sekä oppitunnilla että kotona. Jokaista kirjan esimerkkiä vastaa tehtäväosiossa samantyyppinen tehtävä.

Kirjassa on mukana vanhoja ylioppilastehtäviä. Ylioppilaskokeen vuosi ja tehtävänumero on ilmoitettu tehtävänannon lopussa, esimerkiksi [S2008, 1].

**Sekalaisia tehtäviä**

Tehtäväosion lopussa on sekalaisia tehtävä-osio, johon on koottu muutama tehtävä koko luvun aihealueista. Tämän osion tehtäviä voi käyttää esimerkiksi kotitehtävinä.

**Keskeisiä käsitteitä**

Jokainen luvun lopussa on käsitekartta, joka kokoaa luvun keskeiset käsitteet.

**Kertausosa**

Kirjan lopussa olevaan kertausosaan on koottu lyhyesti kunkin luvun tärkeimmät asiat. Jokaiseen lukuun liittyy lisäksi kertaustehtäviä. Kertausosan lopussa on myös kolme harjoituskoetta.

**Ekstrat**

Kirjan loppuun on koottu ekstraluvuksi kurssiin liittyvää oheismateriaalia. Ekstroja voi tarpeen mukaan käyttää joko opetuksessa tai opiskelijan omana lukemistona. Teoriaosassa on viittauksia ekstralukuun.

Helsingissä kesäkuussa 2009

*Tekijät*

# Ohjeita matematiikan opiskeluun

**Motivoi itsesi**

Menestyksellinen matematiikan opiskelu vaatii motivaatiota. Se sinun on itse hankittava. Matematiikka on varmasti tärkeä ja hyödyllinen oppiaine, mutta sinun on itse löydettävä syyt, joiden takia matematiikkaa kannattaa opiskella. Mihin sinä tulet matematiikan taitoja tarvitsemaan?

**Opiskele kotona**

1. Lue ajatuksella kirjan teoriaosa läpi. Kertaa samalla mahdolliset tunnilla tekemäsi muistiinpanot.
2. Käy läpi kirjan esimerkit.
3. Kun alat ratkaista tehtävää, lue se ensin huolella.
4. Arvioi, onko saamasi lopputulos oikea tai yleensä mahdollinen.
5. Jos et pääse tehtävässä eteenpäin, jätä se hautumaan vähäksi aikaa – tehtävä voi onnistua myöhemmin.

**Kysy**

Jos et ymmärrä tunnilla selitettyä asiaa, pyydä siihen heti tilaisuuden tullen lisäselvitystä. Jos jokin kotitehtävistä on jäänyt ratkaisematta, pyydä opettajaa esittämään tehtävän ratkaisu.

**Valmistaudu kokeeseen**

Kertaa teoriaosa ja erityisesti esimerkit. Käy läpi erilaisten laskutyyppien ratkaisuperiaatteita. Hyödynnä kirjan kertausosaa, siihen liittyviä kertaustehtäviä ja harjoituskokeita. Varaa aikaa, sillä viimeisenä iltana et ehdi kaikkea tätä tehdä.

**Laske**

Laske mahdollisimman paljon erityyppisiä tehtäviä. Se lienee ainoa keino oppia matematiikkaa. Laskemalla matemaattinen ajatusmaailma laajenee ja laskurutiini kasvaa.

# 1 Luvut ja niillä laskeminen

## 1.1 Lukujoukot ja laskutoimitukset

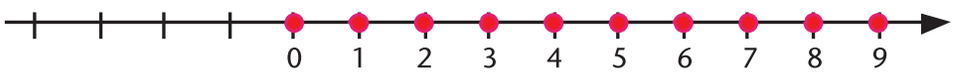
### Lukujoukot

Yksinkertaisimpia kaikista luvuista ovat ne, jotka ilmaisevat lukumäärää. Näitä ovat **positiiviset kokonaisluvut** 1, 2, 3, … ja luku nolla. Yhdessä ne muodostavat **luonnollisten lukujen** joukon, jolle käytetään merkintää **N**.

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Joukkoa merkitään aaltosuluilla.

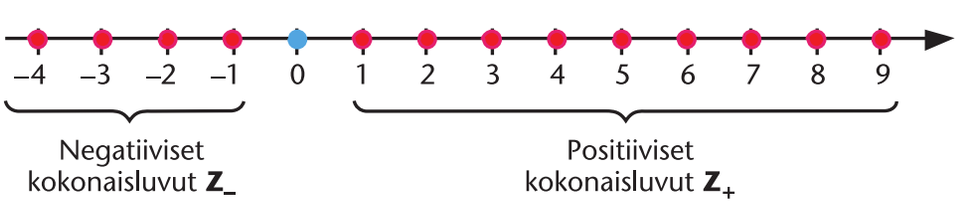
Luonnollisia lukuja käyttäen voidaan siis vastata kysymykseen ”Kuinka monta?”




Pelkät luonnolliset luvut ovat riittämättömiä käytännön tarpeisiin. Esimerkiksi taloudellisen tappion ilmaiseminen niiden avulla on mahdotonta. Tämä johtuu siitä, että kahden luonnollisen luvun $m$ ja $n$ erotus $m - n$ ei aina ole luonnollinen luku.

Kun luonnollisten lukujen joukkoon lisätään positiivisten kokonaislukujen vastaluvut $-1$, $-2$, $-3$, ... saadaan **kokonaislukujen joukko**, jolle käytetään merkintää **Z**.

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

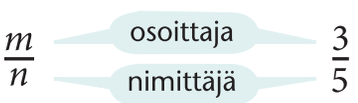



Yksi negatiivisten lukujen varhaisimpia käyttötarkoituksia oli tappion ilmaiseminen. Arkielämässä negatiivisia lukuja tarvitaan esimerkiksi lämpötilan, tililtäoton ja paikan merenpinnasta mitatun korkeuden ilmaisemiseen.

Kokonaislukuja ei voida käyttää ilmaisemaan suhteellisia osuuksia, koska kahden kokonaisluvun $m$ ja $n$ osamäärä $\frac{m}{n}$ ei aina ole kokonaisluku. Suhteellisten osuuksien ilmaisemista varten tarvitaan lukualue, joka koostuu kaikista kokonaislukujen osamääristä $\frac{m}{n}$, $n \neq 0$. Näiden muodostamaa lukujoukkoa sanotaan **rationaalilukujen joukoksi**, jolle käytetään merkintää **Q**.

$$\mathrm{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \text{ ja } n \text{ ovat kokonaislukuja ja } n \neq 0 \right\}$$

Muotoa $\frac{m}{n}$ sanotaan rationaaliluvun **murtolukumuotoiseksi** esitykseksi. Luku $m$ on murtoluvun $\frac{m}{n}$ **osoittaja** ja luku $n \neq 0$ sen **nimittäjä**.




Kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja, koska ne voidaan esittää murtolukumuodossa. Myös päättyvät ja päättymättömät jaksolliset desimaaliluvut voidaan esittää murtolukumuodossa, joten nekin ovat rationaalilukuja.

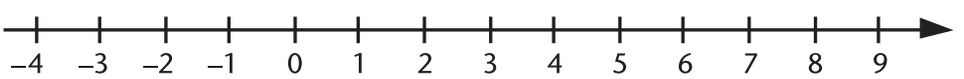
| Rationaaliluku | Murtolukumuoto |
|---|---|
| 4 | $\frac{4}{1}$ |
| –0,75 | $-\frac{3}{4}$ |
| 1,5 | $\frac{3}{2}$ |
| –5,42 | $-\frac{271}{50}$ |
| 1,232323… jakso | $\frac{122}{90}$ |

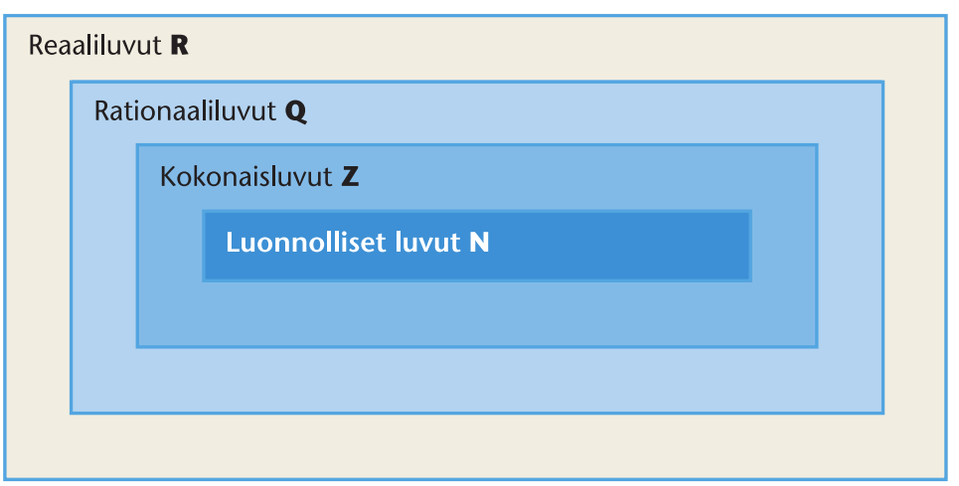
Rationaaliluvuilla voidaan ilmaista suhteellisia osuuksia, ja niitä käyttäen voidaan vastata esimerkiksi kysymykseen ”Kuinka monen osa luku $m$ on luvusta $n$?” Rationaaliluvut riittävät myös sellaisten suureiden käsittelyyn, joiden muutos tapahtuu hyppäyksittäin. Tällainen suure on esimerkiksi rahan määrä. Euroina mitattuna sen pienin muutos on yksi sentti.

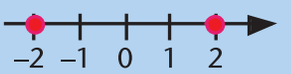
Rationaalilukujen avulla ei ole mahdollista kuvata jatkuvasti muuttuvia suureita. Tällaisia ovat esimerkiksi monet geometrian suureet, kuten pituus, pinta-ala ja tilavuus. Jatkuvan muutoksen ilmaisemiseksi on välttämätöntä laajentaa rationaalilukujen joukkoa.

Päättymättömiä, jaksottomia desimaalilukuja ei voida esittää murtolukumuodossa, joten ne eivät ole rationaalilukuja. Päättymättömiä jaksottomia desimaalilukuja sanotaan **irrationaaliluvuiksi**. Esimerkiksi ympyrän kehän ja halkaisijan suhde $\pi = 3{,}14\ldots$ on irrationaaliluku.

Kun rationaalilukujen joukkoon lisätään päättymättömät jaksottomat desimaaliluvut eli irrationaaliluvut, saadaan **reaalilukujen joukko**. Reaalilukujen joukkoa merkitään kirjaimella **R**. Niiden geometrinen esitys on koko lukusuora.



| Käsite | Selitys | Käsite kirjaimin | Esimerkkejä |
|---|---|---|---|
| **Alkuluku** | • Kokonaisluku ( > 1), joka voidaan kirjoittaa vain itsensä ja luvun 1 tulona. | | $3 = 1 \cdot 3$<br>Luku 3 on alkuluku.<br><br>$4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$<br>Luku 4 ei ole alkuluku. |
| **Vastaluku** | • Luvun $a$ ja sen vastaluvun summa on nolla. | Luvun $a$ etumerkki muutetaan vastakkaiseksi.<br>$-a$ | Luvun 3,145 vastaluku on –3,145.<br><br>Luvun –2 vastaluku on $-(-2) = 2$. |
| **Itseisarvo** | • Luvun $a$ etäisyys nollasta.<br><br>• Luvun ja sen vastaluvun itseisarvot ovat yhtä suuret. | $\lvert a \rvert = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$ |  <br><br>$\lvert -2 \rvert = 2$ $\lvert 2 \rvert = 2$ |
| **Käänteisluku** | • Luvun ja sen käänteisluvun tulo on yksi.<br><br>• Murtoluvun käänteisluku muodostetaan vaihtamalla osoittajan ja nimittäjän paikat. | Luvun $a$ käänteisluku on $\frac{1}{a}$.<br><br>Luvun $\frac{m}{n}$ käänteisluku on $\frac{n}{m}$. | Luvun 5 käänteisluku on $\frac{1}{5}$.<br><br>Luvun $-\frac{1}{3}$ käänteisluku on $-\frac{3}{1} = -3$. |
| **Neliöjuuri** | • Luvun $a \geq 0$ neliöjuuri on se ei-negatiivinen luku, jonka toinen potenssi on $a$.<br><br>• Lukua $a$ sanotaan juurrettavaksi. | $\sqrt{a}$ on se luku, jolle pätee<br>1) $\sqrt{a} \geq 0$<br>ja<br>2) $(\sqrt{a})^2 = a$. | Esimerkiksi $\sqrt{9} = 3$, sillä $3 \geq 0$ ja $3^2 = 9$.<br><br>Koska –9 on negatiivinen, $\sqrt{-9}$ ei ole määritelty.<br><br>Sen sijaan $-\sqrt{9} = -3$. |

**ESIMERKKI 1** Määritä lukujen 16 ja $-\frac{1}{4}$

a) vastaluvut
b) itseisarvot
c) käänteisluvut
d) neliöjuuret.

**RATKAISU**

a) Koska luvun $a$ vastaluku on $-a$, luvun 16 vastaluku on $-16$.
Vastaavasti luvun $-\frac{1}{4}$ vastaluku on $-\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

b) $|16| = 16$ ja $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$.

c) Luvun 16 käänteisluku on $\frac{1}{16}$.
Luvun $-\frac{1}{4}$ käänteisluku on $\frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{4}{1} = -4$.

d) $\sqrt{16} = 4$, koska $4^2 = 16$ ja $4 \geq 0$.
$\sqrt{-\frac{1}{4}}$ ei ole määritelty, koska juurrettava $-\frac{1}{4}$ on negatiivinen.

**VASTAUS** a) $-16$ ja $\frac{1}{4}$ b) 16 ja $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{16}$ ja $-4$
d) 4, $\sqrt{-\frac{1}{4}}$ ei ole määritelty

**ESIMERKKI 2**

a) Jaa luvut 12 ja 18 alkutekijöihin eli kirjoita luvut alkulukujen tulona.
b) Millä lukua 1 suuremmilla kokonaisluvuilla molemmat luvut ovat jaollisia?

**RATKAISU**

a) $12 = 2 \cdot 6$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3$

$18 = 3 \cdot 6$
$= 3 \cdot 2 \cdot 3$
$= 2 \cdot 3 \cdot 3$

Kirjoitetaan ensin 12 lukujen 2 ja 6 tulona. Luku 6 voidaan vielä kirjoittaa lukujen 2 ja 3 tulona.

b) Alkutekijähajotelmista nähdään, että molemmat luvut ovat jaollisia luvuilla 2 ja 3. Tällöin molemmat ovat jaollisia myös tulolla $2 \cdot 3 = 6$.

**VASTAUS** a) $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ b) 2, 3 ja 6

## Laskutoimitukset ja -lait

Luonnollisten lukujen joukossa yhteenlaskun ja kertolaskun tulokseksi tulee aina luonnollinen luku. Yhteenlasku ja kertolasku ovat määriteltyjä luonnollisten lukujen joukossa. Vähennyslasku ja jakolasku puolestaan eivät ole määriteltyjä luonnollisten lukujen joukossa, koska niiden tulos ei aina kuulu luonnollisten lukujen joukkoon.

Vähennyslasku on määritelty kokonaislukujen joukossa ja jakolasku rationaalilukujen joukossa. Kaikki neljä peruslaskutoimitusta, yhteenlasku, vähennyslasku, kertolasku ja jakolasku, ovat määriteltyjä rationaalilukujen ja reaalilukujen joukossa.

| | **Kirjaimin** | **Esimerkkejä** |
|---|---|---|
| **Yhteenlasku** | $a + b$<br>yhteenlaskettavat $a$ ja $b$ | $1{,}45 + 6{,}3 = 7{,}75$ |
| **Vähennyslasku** | $a - b$<br>vähenevä – vähentäjä | $5 - 2 = 5 + (-2) = 3$ |
| **Kertolasku** | $a \cdot b$<br>tulon tekijät $a$ ja $b$ | $8 \cdot (-3) = -24$<br>$-7 \cdot (-4) = 28$ |
| **Jakolasku** | $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ $\frac{\text{jaettava}}{\text{jakaja}}$<br>$a : b$, $b \neq 0$<br>jaettava : jakaja | $\frac{4}{-2} = -2$, $\frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}$<br>$-9 : 3 = -3$<br>$-5{,}5 : (-4) = 1{,}375$ |

Jos tulossa tai osamäärässä on pariton määrä negatiivisia tekijöitä, tulos on negatiivinen.

$$(-2) \cdot (-3) \cdot (-4) = -24$$

Jos taas negatiivisia tekijöitä on parillinen määrä, tulos on positiivinen. Negatiiviset tekijät on merkittävä sulkuihin.

$$(-2) \cdot (-3) \cdot 4 = 24$$

Jotta voidaan välttää tarpeetonta sulkujen käyttöä, tehdään seuraava sopimus:

1. Suluissa olevat laskutoimitukset lasketaan ensin. Jos laskussa on sisäkkäisiä sulkuja, niin aloitetaan sisimmäisistä. Tällöin käytetään selvyyden vuoksi erilaisia sulkuja.
2. Seuraavaksi lasketaan kerto- ja jakolaskut.
3. Lopuksi lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut siinä järjestyksessä kuin ne ovat vasemmalta oikealle.

Haluttu laskujärjestys voidaan osoittaa käyttämällä sulkuja, jolloin laskeminen aloitetaan sisimmäisistä suluista.

$\{\ [\ (\quad)\ ]\ \}$

kaarisulut
hakasulut
aaltosulut

**ESIMERKKI 3** Laske.

a) $20-\{10-[2-(2-5)]\}$

b) $3{,}4+0{,}5\cdot(1{,}2-4{,}2)\cdot(3{,}5-5{,}5)$

**RATKAISU**

a) $20-\{10-[\underbrace{2-(2-5)}_{=2-(-3)}]\}$
$=20-\{10-[2+3]\}$
$=20-\{10-5\}$
$=20-5$
$=15$

b) $3{,}4+0{,}5\cdot(1{,}2-4{,}2)\cdot(3{,}5-5{,}5)$
$=3{,}4+0{,}5\cdot(-3)\cdot(-2)$
$=3{,}4+3{,}0$
$=6{,}4$

Kun negatiivisia tulon tekijöitä on parillinen määrä, tulos on positiivinen.

**VASTAUS** a) 15 b) 6,4

Reaalilukujen yhteen- ja kertolasku noudattavat **liitäntä-, vaihdanta-** ja **osittelulakia**. Sanotaan, että nämä laskutoimitukset ovat liitännäisiä ja vaihdannaisia. Tämä merkitsee esimerkiksi sitä, että kolmen tai useamman luvun summan voi laskea laskemalla lukuja pareittain yhteen missä järjestyksessä tahansa. Sulkuja ei näin ollen tarvitse merkitä näkyviin. Vaihdannaisuuden perusteella taas yhteenlaskettavien järjestystä voi vaihtaa. Osittelulakia puolestaan käytetään **yhteisen tekijän** erottamiseen.

| Laki | Laki kirjaimin | Esimerkkejä |
|---|---|---|
| **Liitäntälaki** | | |
| yhteenlasku | $(a + b) + c = a + (b + c)$ | $(-1 + 3) + 4 = -1 + (3 + 4)$ |
| kertolasku | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ | $(-2 \cdot 3) \cdot 5 = -2 \cdot (3 \cdot 5)$ |
| **Vaihdantalaki** | | |
| yhteenlasku | $a + b = b + a$ | $-2 + 7 = 7 + (-2)$ |
| kertolasku | $a \cdot b = b \cdot a$ | $6 \cdot (-3) = (-3) \cdot 6$ |
| **Osittelulaki** | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ | $7 \cdot (13 + (-9))$ $= 7 \cdot 13 + 7 \cdot (-9)$ |

ESIMERKKI 4

Käytä osittelulakia ja laske.

a) $3 \cdot 103 + 3 \cdot (-101)$ b) $2 \cdot 170 + 162 \cdot (-2)$

RATKAISU

a) Luku 3 on yhteenlaskettavien yhteinen tekijä:

$$3 \cdot 103 + 3 \cdot (-101) = 3 \cdot (103 - 101) = 3 \cdot 2 = 6$$

b) Luku $-2$ voidaan kirjoittaa lukujen $-1$ ja 2 tuloksi. Tällöin yhteenlaskettavilla on yhteinen tekijä 2.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 170 + 162 \cdot (-2) &= 2 \cdot 170 + 162 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 2 \cdot (170 - 162) = 2 \cdot 8 = 16 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) 6 b) 16

# Tehtäviä

**Lukujoukot**

1. Ilmoita lukujen vastaluvut.

   a) $-5$ b) $7{,}5$ c) $-\frac{3}{8}$ d) $\pi$

2. Ilmoita lukujen käänteisluvut.

   a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{-10}$ c) $-\frac{5}{8}$ d) $-7$

3. Laske.

   a) $\left|-1\frac{5}{9}\right|$ b) $|0{,}06|$ c) $\left|-\sqrt{9}\right|$ d) $-|-\pi|$

E1 4. Määritä lukujen $-25$ ja $\frac{4}{9}$

   a) vastaluvut
   b) käänteisluvut
   c) itseisarvot
   d) neliöjuuret.

5. Laske laskimella ja anna vastaus kahden desimaalin tarkkuudella.

   a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{-3}$ c) $\sqrt{\frac{9}{16}}$

6. Laske neliöjuuren määritelmän perusteella.

   a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{-16}$ c) $-\sqrt{25}$

7. Reaaliluvun $a$ **kuutiojuuri** on luku, jonka kolmas potenssi on $a$. Luvun $a$ kuutiojuurta merkitään symbolilla $\sqrt[3]{a}$. Esimerkiksi $\sqrt[3]{8} = 2$, sillä $2^3 = 8$, ja $\sqrt[3]{-8} = -2$, sillä $(-2)^3 = -8$.

   Laske kuutiojuuren määritelmän perusteella.

   a) $\sqrt[3]{1}$ b) $\sqrt[3]{-64}$ c) $-\sqrt[3]{27}$ d) $\left(\sqrt[3]{-5}\right)^3$

8. Laske.

   a) $|-1{,}5 - 4{,}5| \cdot 2 - 5$ b) $2 \cdot |-\pi| - (-7)$

9. Laske.

   a) $-\left(-\sqrt{25}\right) + 3 \cdot \left|-\sqrt{9}\right|$ b) $\left|-\sqrt{81} - \sqrt{4}\right| - (-5)$

10. Olkoon $a$ eräs kokonaisluku. Ilmoita
    a) kolme seuraavaa peräkkäistä kokonaislukua
    b) edeltävät kolme kokonaislukua.

11. Mitkä luvuista 6, 7, –3, 11, 15 ja 0 ovat alkulukuja? Perustele.

12. Jaa seuraavat luvut tekijöihin eli kirjoita luvut alkulukujen tulona.

a) 35 b) 21 c) 50

E2 13. a) Kirjoita luvut 30 ja 42 alkulukujen tulona.
b) Millä lukua 1 suuremmilla kokonaisluvuilla molemmat luvut ovat jaollisia?

14. Määritä lukujen 24 ja 36 yhteiset, lukua 1 suuremmat kokonaislukutekijät.

## Laskutoimitukset ja -lait

Laske tehtävät 15–21 ilman laskinta.

15. a) $-3-1+1+3$ b) $-3-(1+1+3)$

c) $[(15-7)-6]-[15-(7-6)]$

16. a) $-4+(-30):6$ b) $12:(-3)\cdot 5$ c) $2-2\cdot 3-3$

17. a) $-32-\{-16-[13-(2-1)]\}$

b) $-\{24-[14+7-(-5-3)]\}$

c) $\{5-[6-(-1000-200)]\}+(-1000-200)$

E3 18. a) $-35-\{35-[20-(5-20)+5]-5\}$

b) $1{,}2+0{,}1(0{,}3-5{,}3)(1{,}5-21{,}5)$

E4 19. Käytä osittelulakia ja laske.

a) $5\cdot 765+5\cdot 235$ b) $7\cdot 362-7\cdot 162$

20. Käytä osittelulakia ja laske.

a) $4\cdot 2347+4\cdot(-2340)$ b) $14\cdot 458+14\cdot 142-14\cdot 598$

21. Laske osittelulain avulla.

a) $3\cdot 189-9\cdot 61$ b) $24\cdot 150-12\cdot 250+36\cdot(-10)$

## Sekalaisia tehtäviä

22. Laske.
a) $|0|$ b) $-\left(\frac{-6}{5}\right)$ c) $\left|-\sqrt{36}\right|$

23. Ilmoita luvun $-\frac{8}{3}$
a) vastaluvun käänteisluku b) käänteisluvun itseisarvo.

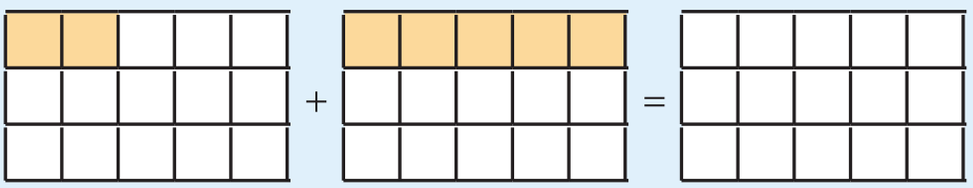
24. Kirjoita luvut alkulukujen tuloksi.
a) 32 b) 54 c) 120

25. Laske.
a) $|6+4:2|+7-(-\sqrt{36})$
b) $-\{10-[2\cdot 6-4(15-20)-2]+1\}$

26. Laske osittelulain avulla.
a) $9\cdot 1235-9\cdot 1230$ b) $5\cdot 123+5\cdot(-23)-5\cdot 97$

# 1.2 Murtoluvuilla laskeminen

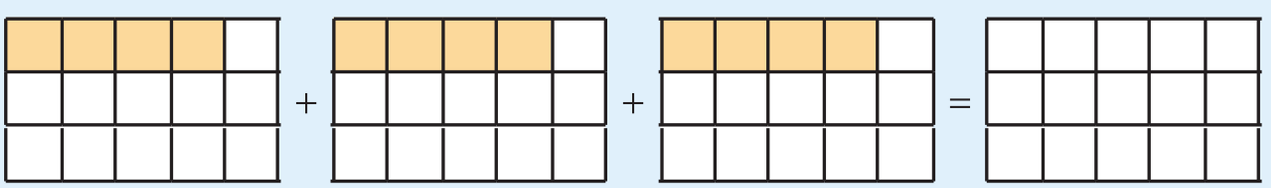
**POHDINTA 1** Kuinka monta ruutua viimeisestä kuvasta on väritettävä? Merkitse kuvan laskutoimitus murtolukujen avulla. Muotoile lopuksi sääntö murtolukujen yhteenlaskulle.



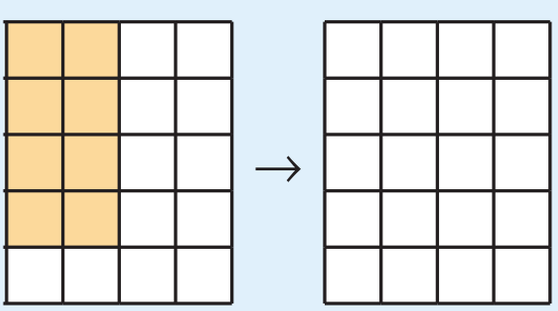
$$\frac{\phantom{a}}{\phantom{c}} + \frac{\phantom{b}}{\phantom{c}} = \frac{\phantom{a+b}}{\phantom{c}}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} =$$

**POHDINTA 2** Kuinka monta ruutua viimeisestä kuvasta on väritettävä? Merkitse yhteenlaskut kertolaskuna. Muotoile lopuksi sääntö, joka kertoo, miten murtoluku kerrotaan kokonaisluvulla.



**POHDINTA 3** Väritetyistä ruuduista $\frac{3}{4}$ säilyy väritettyinä, loput muutetaan valkoisiksi. Kuinka monta väritettyä ruutua jää jäljelle? Muotoile tehtävästä kertolasku, jossa kaksi murtolukua kerrotaan keskenään. Päättele tämän avulla yleinen sääntö murtolukujen kertolaskulle.



Muotoa $\frac{m}{n}$ ($m$ ja $n$ kokonaislukuja ja $n \neq 0$) olevaa lukua sanotaan murtoluvuksi. Jos murtoluvun osoittajalla $m$ ja nimittäjällä $n$ on yhteinen tekijä, niin murtolukua voidaan yksinkertaistaa jakamalla sekä osoittaja että nimittäjä tällä yhteisellä tekijällä. Tätä sanotaan **supistamiseksi**. Luku, jolla supistetaan, merkitään murtoluvun oikeaan yläreunaan.

**Lavennettaessa** sekä murtoluvun osoittaja että nimittäjä kerrotaan jollakin kokonaisluvulla. Luku, jolla lavennetaan, merkitään murtoluvun vasempaan yläreunaan.

Supistaminen $\frac{km}{kn}^{(k} = \frac{m}{n}$

$-\frac{81}{24}^{(3} = -\frac{27}{8}$

Laventaminen $^{k)}\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$

$^{2)}\frac{13}{5} = \frac{26}{10}$

Laventaminen ja supistaminen eivät muuta luvun suuruutta. Niitä käytetään hyväksi murtolukujen laskutoimituksissa.

- Murtoluvut ovat **samannimiset**, jos niillä on sama nimittäjä. Vain samannimisiä murtolukuja voidaan laskea yhteen. Murtoluvut saadaan samannimisiksi laventamalla.

- Vastaus on aina supistettava yksinkertaisimpaan muotoon.

Jos murtoluku $\frac{m}{n}$ on pienempi kuin $-1$ tai suurempi kuin 1, se voidaan esittää **sekalukuna**, joka koostuu kokonaisosasta ja murto-osasta.

Sekaluku

$2\frac{3}{5}$

→

Murtoluku $\frac{m}{n}$

$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$

Murtoluku $\frac{m}{n}$

$-\frac{81}{24}$

→

Sekaluku

$-\frac{27}{8} = -\frac{3 \cdot 8 + 3}{8} = -3\frac{3}{8}$

| Laskutoimitus | Selitys | Kirjainmuoto |
|---|---|---|
| **Yhteen- ja vähennyslasku** | Jos murtoluvut ovat **samannimiset**, niiden<br>• yhteenlaskussa osoittajat lasketaan yhteen<br>• vähennyslaskussa osoittajat vähennetään toisistaan.<br>Summan ja erotuksen nimittäjäksi tulee yhteenlaskettavien murtolukujen yhteinen nimittäjä.<br>Jos murtoluvut **eivät ole samannimisiä**, ne lavennetaan ensin samannimisiksi ja sitten suoritetaan haluttu laskutoimitus | $\frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}$<br>$\frac{m}{n}-\frac{p}{n}=\frac{m-p}{n}$ |
| **Kertolasku** | Murtolukujen kertolaskussa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät kerrotaan keskenään. | $\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{m\cdot p}{n\cdot q}$ |
| **Jakolasku** | Murtolukujen jakolasku muutetaan kertolaskuksi. Jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla. | $\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}$ |

Murtolukuja laskimella s. 140

Laskimissa murtolukulaskuihin käytetään murtolukunäppäintä $a\frac{b}{c}$. Joissakin graafisissa laskimissa murtolukunäppäimen sijaan murtoluvut syötetään jakomerkin avulla ja tulos muutetaan murtoluvuksi Frac-toiminnolla.

ESIMERKKI 1

Laske.

a) $\frac{4}{5}+\frac{2}{7}$ b) $3\frac{1}{3}-1\frac{3}{5}$

RATKAISU

a) $\overset{7)}{\frac{4}{5}}+\overset{5)}{\frac{2}{7}}$

$=\frac{28}{35}+\frac{10}{35}$

$=\frac{28+10}{35}$

$=\frac{38}{35}$

$=1\frac{3}{35}$

b) $3\frac{1}{3}-1\frac{3}{5}$

$=\overset{5)}{\frac{10}{3}}-\overset{3)}{\frac{8}{5}}$

$=\frac{50}{15}-\frac{24}{15}$

$=\frac{26}{15}$

$=1\frac{11}{15}$

Sekaluvut kannattaa muuttaa murtolukumuotoon ennen laskutoimitusten suorittamista.

VASTAUS

a) $1\frac{3}{35}$ b) $1\frac{11}{15}$

**ESIMERKKI 2** Laske.

a) $5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{15}\right)$

b) $4\frac{1}{6} : 2\frac{1}{2}$

**RATKAISU**

a) $5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{15}\right)$

Muuta kokonaisluku murtoluku-muotoon.

$= \frac{5}{1} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{7}{15}\right)$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot (-2) \cdot (-7)}{1 \cdot 3 \cdot \underset{3}{\cancel{15}}}$

$= \frac{14}{9} = 1\frac{5}{9}$

b) $4\frac{1}{6} : 2\frac{1}{2}$

$= \frac{25}{6} : \frac{5}{2}$

$= \frac{25}{6} \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}}$

$= \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

**VASTAUS** a) $1\frac{5}{9}$ b) $1\frac{2}{3}$

**ESIMERKKI 3** Laske.

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

b) $\left(\frac{2}{5} - 1\frac{3}{4}\right) : (-3)$

**RATKAISU**

a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{7}{10} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{6} \cdot \frac{7}{\underset{2}{\cancel{10}}} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{7}{12} + \overset{2)}{\frac{7}{6}}$

$= \frac{7}{12} + \frac{14}{12}$

$= \overset{3)}{\frac{21}{12}}$

$= \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

b) $\left(\frac{2}{5} - 1\frac{3}{4}\right) : (-3)$

$= \left(\overset{4)}{\frac{2}{5}} - \overset{5)}{\frac{7}{4}}\right) : \left(\frac{-3}{1}\right)$

$= \left(\frac{8}{20} - \frac{35}{20}\right) : \left(\frac{-3}{1}\right)$

$= -\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{20} \cdot \left(-\frac{1}{\underset{1}{\cancel{3}}}\right)$

$= \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{1}$

$= \frac{9}{20}$

Kahden negatiivisen luvun tulo on positiivinen.

**VASTAUS** a) $1\frac{3}{4}$ b) $\frac{9}{20}$

# Tehtäviä

Laske tehtävät ilman laskinta. Tarkista tulos laskimella.

27. Supista luvut sievimpään muotoon.

a) $\frac{15}{3}$ b) $\frac{-30}{4}$

28. Lavenna samannimisiksi.

a) $\frac{5}{6}$ ja $\frac{7}{12}$ b) $\frac{56}{96}$ ja $\frac{7}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{13}{2}$

29. a) Muunna sekaluvuksi $\frac{12}{5}$, $\frac{-16}{6}$ ja $\frac{-15}{-4}$.

b) Muunna murtoluvuksi $4\frac{1}{2}$, $-7\frac{9}{10}$ ja $6\frac{11}{46}$.

30. a) $\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$ b) $-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$ c) $-4\frac{7}{11}-3\frac{7}{11}$

E1 31. a) $\frac{6}{8}+\frac{7}{4}$ b) $5\frac{1}{3}-\frac{7}{11}$ c) $-\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}$

32. a) $\frac{5}{10}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}$ b) $5\frac{1}{6}-\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}$ c) $-\frac{3}{5}+3-1\frac{1}{2}$

33. a) $\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{7}{11}\right)$ b) $\left(\frac{-5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{9}\right)$ c) $4\cdot 5\frac{6}{7}$

34. a) $\frac{2}{3}:\frac{7}{11}$ b) $\frac{4}{3}:\left(\frac{-13}{4}\right)$ c) $\frac{7}{8}:4$

E2 35. a) $4\cdot\frac{3}{8}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$ b) $5\frac{5}{9}:3\frac{1}{3}$ c) $-2\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{9}{22}\right):3$

36. Laske lukujen $\frac{4}{7}$ ja $\frac{7}{4}$

a) summa b) erotus
c) tulo d) osamäärä.

E3 37. a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{18}+3\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}$ b) $\left(\frac{7}{9}-3\frac{2}{3}\right):(-2)$

38. a) $3+\frac{100}{5}\cdot\frac{3}{100}$ b) $7-7:\frac{1}{5}$ c) $3\frac{4}{3}+\frac{8}{5}\cdot\left(-\frac{1}{9}\right):\frac{2}{9}$

39. a) $4+\frac{1}{7}\cdot\frac{21}{4}-\frac{1}{4}$ b) $-1-\frac{2}{3}:(-8)$ c) $3\cdot\frac{1}{9}-3\frac{1}{9}+\frac{1}{6}:\frac{6}{5}$

40. Laske lukujen $-2\frac{1}{3}$ ja $1\frac{2}{5}$
    a) vastalukujen summa b) käänteislukujen summa.

41. Olkoon $a=1\frac{1}{5}$ ja $b=-\frac{2}{3}$. Laske $\frac{a+b}{a-b}$. Mitä on tällöin $\frac{a-b}{a+b}$?

**Sekalaisia tehtäviä**

42. Lavenna samannimisiksi.
    a) $\frac{8}{5}$ ja $\frac{-7}{20}$ b) $\frac{28}{39}$ ja $\frac{7}{3}$ c) $\frac{2}{17}$ ja $\frac{3}{2}$

43. Laske.
    a) $\frac{4}{5}+1\frac{3}{4}$ b) $2\frac{3}{4}-3\frac{1}{2}$
    c) $-1\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$ d) $\frac{4}{7}:5\frac{3}{7}$

44. Laske.
    a) $4\frac{1}{3}-2\cdot\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{9}-9:\frac{3}{5}$ c) $\frac{7}{3}+\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{2}$

45. Merkitse ja laske lukujen $2\frac{2}{3}$ ja $1\frac{1}{4}$
    a) summan käänteisluku
    b) erotuksen käänteisluku
    c) summan käänteisluvun ja erotuksen käänteisluvun tulo.

# 1.3 Potenssien laskusäännöt

**POHDINTA 1**

Luvun tulo itsensä kanssa voidaan kirjoittaa lyhyemmin **potenssimerkinnän** avulla. Esimerkiksi $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^6$. Kirjoita seuraavat kertolaskut potenssina.

$5 \cdot 5 \cdot 5$ $\qquad$ $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{100 \text{ kpl}}$ $\qquad$ $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}}$

**POHDINTA 2**

Kirjoita kerto- ja jakolaskut yhtenä potenssina mallin mukaan.

$3^4 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$ $\qquad$ $\dfrac{2^7}{2^3} = \dfrac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 2^4$

$a^3 \cdot a^5$ $\qquad$ $\dfrac{2^9}{2^6}$

$a^{20} \cdot a^{50}$ $\qquad$ $\dfrac{k^{100}}{k^{20}}$

$a^m \cdot a^n$ $\qquad$ $\dfrac{a^m}{a^n}$

**POHDINTA 3**

Kirjoita mallin mukaan yhtenä potenssina.

$(3^2)^4 = 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^8$

$(x^3)^5$

$(a^8)^7$

$(a^m)^n$

**POHDINTA 4**

Kirjoita lausekkeet ilman sulkuja mallin mukaan.

$(x \cdot y)^2 = (x \cdot y)(x \cdot y) = x^2 y^2$ $\qquad$ $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{x^2}{y^2}$

$(ab)^4$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^5$

$(ab)^n$ $\qquad$ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Kun luku kerrotaan itsellään useamman kerran, tulo merkitään potenssina. Esimerkiksi tulo $5 \cdot 5 \cdot 5$ voidaan merkitä potenssina $5^3$.

Kymmenen potenssit s. 141

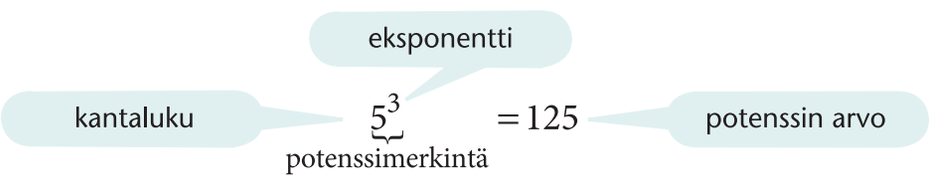
**Potenssin määritelmä**

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ kpl}} = a^n,$$

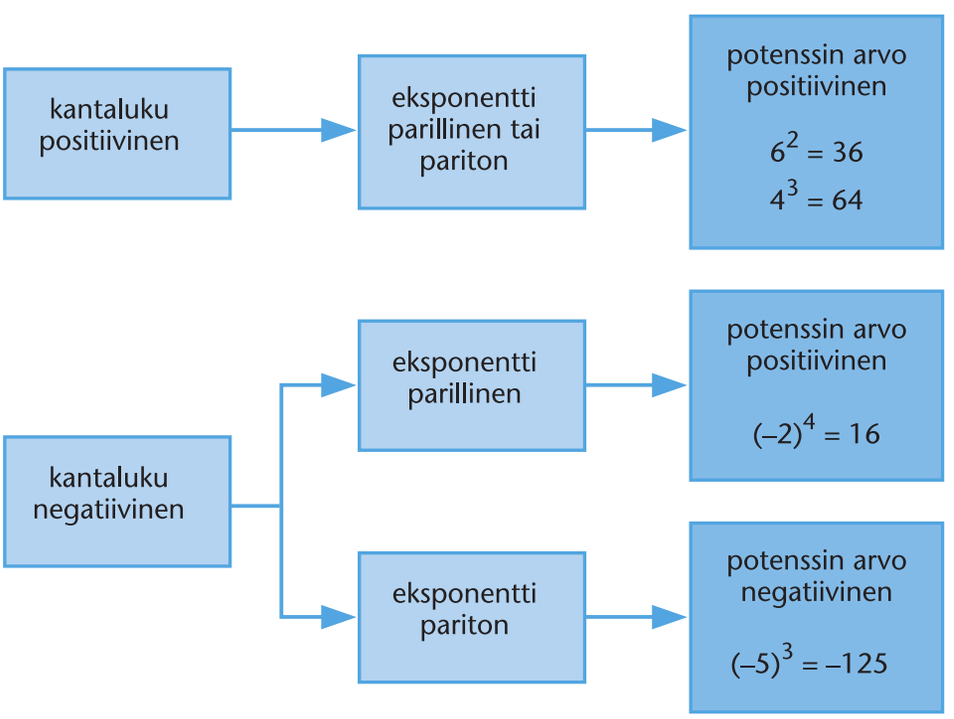
jossa $a$ on reaaliluku ja $n$ positiivinen kokonaisluku.

Tulon tekijänä oleva luku on **kantaluku**. **Eksponentti** ilmaisee, kuinka monta kertaa luku on kerrottu itsellään. **Potenssin arvo** saadaan suorittamalla kertolasku, esimerkiksi

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$




Potenssin arvo voi olla positiivinen tai negatiivinen luku. Tämä riippuu kantaluvun merkistä ja siitä, onko eksponentti parillinen vai pariton.



Jos kantaluku on jokin muu kuin luonnollinen luku, positiivinen desimaaliluku tai yksittäinen kirjain, se merkitään sulkuihin. Eksponentin vaikutusaluetta voidaan muuttaa sulkujen avulla.

| Sulkujen kanssa | Ilman sulkuja |
|---|---|
| $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{27}$ | $\frac{2^3}{3} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3} = \frac{8}{3}$ |
| $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 16$ | $-4^2 = -4\cdot 4 = -16$ |
| $(5\cdot 3)^2 = 15^2 = 225$ | $5\cdot 3^2 = 5\cdot 9 = 45$ |
| $(2^3)^2 = 2^3\cdot 2^3 = 8\cdot 8 = 64$ | $2^{3^2} = 2^{3\cdot 3} = 2^9 = 512$ |

Potensseilla $4^3$ ja $4^5$ on sama kantaluku, minkä vuoksi niitä sanotaan **samankantaisiksi potensseiksi**. Lausekkeiden $(-4)^2$ ja $-4^2$ potenssit eivät ole samankantaisia, koska ensimmäisen kantaluku on $-4$ ja jälkimmäisen 4.

Potenssit lasketaan ennen muita laskutoimituksia. Tämän jälkeen noudatetaan normaalia laskujärjestystä: ensin kerto- ja jakolaskut, sitten yhteen- ja vähennyslaskut siinä järjestyksessä kuin ne ovat. Kun potensseja sisältäviä lausekkeita lasketaan laskimella, on yleensä itse otettava huomioon laskujärjestys lisäämällä riittävä määrä sulkuja. Potenssinäppäin on useimmissa laskimissa $x^y$ tai $\wedge$.

**Esimerkki 1** Laske.

a) $-2^4 + (-2)^4 \cdot 2^4$

b) $-3 \cdot 2^3 : [(-1)^3 - (-1)^6]$

**Ratkaisu**

a)
$$\begin{aligned} &-2^4 + (-2)^4 \cdot 2^4 \\ &= -16 + 16 \cdot 16 \\ &= -16 + 256 \\ &= 240 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &-3 \cdot 2^3 : [(-1)^3 - (-1)^6] \\ &= -3 \cdot 8 : [-1 - 1] \\ &= -24 : [-2] \\ &= 12 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 240 b) 12

## Potenssikaavoja

Potenssilausekkeita voidaan sieventää potenssin laskusääntöjen avulla. Ne on helppo johtaa potenssin määritelmästä. Potenssikaavat löytyvät myös taulukkokirjoista.

| | Potenssikaava | Selitys | Esimerkki |
|---|---|---|---|
| samankantaisten potenssien tulo | $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | Samankantaisten potenssien tulossa eksponentit lasketaan yhteen. | $3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$ |
| samankantaisten potenssien osamäärä | $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | Samankantaisten potenssien osamäärässä osoittajan eksponentista vähennetään nimittäjän eksponentti. | $\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$ |
| tulon potenssi | $(ab)^n = a^n b^n$ | Tulon potenssi on potenssien tulo. | $(4x)^2 = 4^2 x^2$ |
| osamäärän potenssi | $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ | Osamäärän potenssi on potenssien osamäärä. | $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$ |
| potenssin potenssi | $(a^m)^n = a^{mn}$ | Potenssin potenssissa eksponentit kerrotaan keskenään. | $(4^2)^3 = 4^{2\cdot 3} = 4^6$ |

**ESIMERKKI 2** Laske lausekkeen arvo. Käytä apuna potenssikaavoja.

a) $5{,}3 \cdot \frac{10^{12}}{10^{10}}$ b) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2$ c) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot (10^3)^2$

**RATKAISU**

a) $5{,}3 \cdot \frac{10^{12}}{10^{10}} = 5{,}3 \cdot 10^{12-10} = 5{,}3 \cdot 10^2 = 5{,}3 \cdot 100 = 530$

b) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}$

Muuta sekaluku ensin murtolukumuotoon.

c) $\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot (10^3)^2 = \frac{1^4}{10^4} \cdot 10^{3\cdot 2} = \frac{1}{10^4} \cdot 10^6 = \frac{10^6}{10^4} = 10^{6-4} = 10^2 = 100$

osamäärän potenssi — potenssin potenssi

**VASTAUS** a) 530 b) $1\frac{7}{9}$ c) 100

## Eksponenttina nolla tai negatiivinen luku

Sieventämällä lauseketta $\frac{2^3}{2^3}$ samankaltaisten potenssien osamäärän laskusääntöä käyttämällä päädytään erikoiseen lopputulokseen:

$$\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$$

Toisaalta kirjoittamalla potenssit kertolaskuna ja supistamalla saadaan

$$\frac{2^3}{2^3} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Samasta laskusta saadaan siis kahdella eri laskutavalla erinäköinen vastaus. Jotta vastaukset olisivat samat eli jotta laskusääntöä voitaisiin käyttää tässäkin tapauksessa, sovitaan, että $2^0 = 1$. Tämä on voimassa kaikille nollasta eroaville kantaluvuille.

**Nollas potenssi** $\quad a^0 = 1$, kun $a \neq 0$

Eksponentin ei tarvitse olla positiivinen kokonaisluku. Potenssi voidaan määritellä myös silloin, kun eksponentti on negatiivinen.

Soveltamalla osamäärään $\frac{4^3}{4^5}$ samankantaisten potenssien osamäärän laskusääntöä saadaan

$$\frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

Jos lasketaan potenssin määritelmän mukaan ja supistetaan, saadaan

$$\frac{4^3}{4^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{1}{\cancel{4}} \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{4^2}$$

Tästä syystä sovitaan, että $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$.

Määritelmä voidaan laajentaa kaikkiin nollasta eroaviin kantalukuihin $a$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Edellisestä laskusäännöstä voidaan johtaa potenssikaava rationaaliluvun negatiiviselle potenssille:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Esimerkiksi $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$.

**Negatiivinen eksponentti**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kun } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ESIMERKKI 3

Laske.

a) $6 \cdot x^0$ b) $-2^0 + 2^{-2}$ c) $\left(3\frac{2}{3}\right)^{-2}$

RATKAISU

a) $6 \cdot x^0$
$= 6 \cdot 1$
$= 6$

b) $-2^0 + 2^{-2}$
$= -1 + \frac{1}{2^2}$
$= -1 + \frac{1}{4}$
$= -\frac{3}{4}$

c) $\left(3\frac{2}{3}\right)^{-2}$
$= \left(\frac{11}{3}\right)^{-2}$
$= \left(\frac{3}{11}\right)^2$
$= \frac{3^2}{11^2}$
$= \frac{9}{121}$

VASTAUS

a) 6 b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{9}{121}$

**ESIMERKKI 4** Laske.

a) $\dfrac{a^{-3}\cdot(a^5)^2}{a^{-4}}$ b) $\dfrac{3(a^2)^4}{6(a^4)^2}$

**RATKAISU**

a)
$$\frac{a^{-3}\cdot(a^5)^2}{a^{-4}} = \frac{a^{-3}\cdot a^{10}}{a^{-4}} = \frac{a^7}{a^{-4}} = a^{7-(-4)} = a^{11}$$

b)
$$\frac{3(a^2)^4}{6(a^4)^2} = \frac{3\cdot a^8}{6\cdot a^8} = \frac{3}{6}\cdot a^0 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$$

**VASTAUS** a) $a^{11}$ b) $\frac{1}{2}$

**ESIMERKKI 5** Laske ilman laskinta. a) $0{,}5^{2300}\cdot 2^{2302}$ b) $\dfrac{8^{1000}}{2^{998}\cdot 4^{998}}$

**RATKAISU**

a)
$$0{,}5^{2300}\cdot 2^{2302} = 0{,}5^{2300}\cdot 2^{2300+2} = \underbrace{0{,}5^{2300}\cdot 2^{2300}}\cdot 2^2 = (0{,}5\cdot 2)^{2300}\cdot 2^2 = 1^{2300}\cdot 4 = 4$$

Käytetään samankantaisten potenssien tulon kaavaa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ oikealta vasemmalle.

Käytetään tulon potenssin kaavaa $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ oikealta vasemmalle.

b)
$$\frac{8^{1000}}{2^{998}\cdot 4^{998}} = \frac{8^{1000}}{(2\cdot 4)^{998}} = \frac{8^{1000}}{8^{998}} = 8^{1000-988} = 8^2 = 64$$

Käytetään nimittäjässä tulon potenssin kaavaa $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ oikealta vasemmalle.

**VASTAUS** a) 4 b) 64

# Tehtäviä

46. Ilmoita potenssina ja laske potenssin arvo, mikäli mahdollista.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7$ b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$ c) $-5 \cdot 5 \cdot 5$
d) $a \cdot a$ e) $(-3a) \cdot (-3a)$ f) $-a \cdot a$

47. Laske laskimella.

a) $3^7$ b) $(-3)^7$ c) $3^6$
d) $(-3)^6$ e) $-3^6 + (-3)^6$

E1 48. Laske. Kirjoita välivaiheet näkyviin.

a) $2 - 3^2 \cdot 3$ b) $-5 + 5 : 2^2$
c) $-3^2 - (-3)^2 - (-3)^3$ d) $-[-(-2)^3 - 2] : (-2)^3$

**Potenssikaavoja**

49. Sievennä potenssikaavoja $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ja $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ käyttäen.

a) $x^4 \cdot x \cdot x^2$ b) $a^2b \cdot ab^3$
c) $\frac{y^{12}}{y^7}$ d) $\frac{x^3x^{10}}{x^{11}}$

50. Sievennä potenssikaavoja $(ab)^n = a^nb^n$ ja $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ käyttäen.

a) $(2a)^4$ b) $(-3xy)^3$
c) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ d) $\left(\frac{-2x}{3}\right)^4$

51. Sievennä potenssikaavaa $(a^m)^n = a^{mn}$ käyttäen.

a) $(y^2)^5$ b) $\left((x^3)^6\right)^2$ c) $-(-s^2)^3$

52. Sievennä potenssikaavoja käyttäen ja laske potenssin arvo.

a) $(2^3)^2$ b) $2^{3^2}$ c) $[(-2)^3]^3$ d) $-(2^3)^2$

53. Laske.

a) $\frac{6a^5}{2a^2}$ b) $\left(\frac{15x^3}{5x}\right)^2$ c) $\left(\frac{3y2y^4}{y^2}\right)^2$

E2 54. Sievennä ja laske lausekkeen arvo, jos se on mahdollista. Käytä apuna potenssikaavoja.

a) $1{,}9 \cdot 10^2 \cdot 10^3$ b) $\frac{2{,}5 \cdot 10^{18}}{10^{15}}$ c) $\left(2\frac{1}{2}\right)^2$
d) $(a^3a^2)^5$ e) $5^{12} \cdot \left(\frac{5^3}{5^8}\right)^2$ f) $\left(\frac{x^9}{x^3}\right)^4$

55. Laske.

a) $\dfrac{(18a)^{10} \cdot (2a)^3}{18^9 a^{10}}$ b) $\dfrac{(-2x)^3 \cdot (-2x)^2}{(2x)^5}$

**Eksponenttina nolla tai negatiivinen luku**

56. Laske.

E3 a) $-2a^0$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ c) $18^{-1}$ d) $\dfrac{3^0}{4}$ e) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$

57. Kirjoita potenssiksi, jonka eksponentti on positiivinen.

a) $a^{-2} \cdot a^{-2}$ b) $\dfrac{a^{-4}}{a^3}$ c) $\dfrac{a^4}{a^{-3}}$ d) $\dfrac{k^0}{k^{-5}}$

58. Sievennä.

a) $\left(-\frac{4}{a}\right)^{-3}$ b) $3a^2 \cdot \frac{1}{3}a^{-2}$ c) $\dfrac{2t^3}{3t^9}$

d) $\dfrac{3t^5}{t^7} \cdot \dfrac{7}{5}$ e) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^{-3}$ f) $(-2a^2)^{-4}$

E4 59. Sievennä.

a) $\dfrac{x^5 \cdot (x^{-2})^4}{x^{-3} \cdot x^{-7}}$ b) $\left(\dfrac{a^3 b^{-2}}{a^{-2} b^{-9}}\right)^4$ c) $\dfrac{(2^6)^2}{(-2^4)^3}$

E5 60. Sievennä lausekkeet potenssikaavoja soveltamalla.

a) $0{,}2^{2760} \cdot 5^{2760}$ b) $4^{102} \cdot 0{,}25^{104}$ c) $\dfrac{10^{800}}{2^{799} \cdot 5^{798}}$

61. Sievennä lausekkeet.

a) $\dfrac{5^{600} \cdot 4^{599}}{20^{599}}$ b) $\dfrac{3^{1200} \cdot 4^{1202}}{2^{1201} \cdot 6^{1201}}$

62. Laske lausekkeen $\left(\dfrac{a^{-3m+1} \cdot a^{\frac{1}{2}-m}}{a^{-4m}}\right)^{-2}$ arvo, kun $a = 3$ ja $m = 125$.

**Sekalaisia tehtäviä**

63. Ilmoita tulos potenssina ja laske potenssin arvo.

a) $\dfrac{2^{60}}{2^{57}}$ b) $\dfrac{(\frac{1}{3})^3}{(\frac{1}{3})^2}$ c) $\dfrac{(-\frac{2}{3})^8}{(-\frac{2}{3})^6}$ d) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

64. Laske.

a) $3^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - 3^2 : 3$ b) $(-1)^0 + (-1)^2 \cdot (-1)^{-2}$

c) $(-3)^4 + 3 : 3^0$ d) $(2^{-1})^{-2}$

65. Sievennä potenssikaavojen avulla.

a) $c \cdot c^2 \cdot c^3 \cdot c^4$ b) $\dfrac{t^6 \cdot t^5}{t^8}$

c) $(-4x^2y^5)^2$ d) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$

66. Sievennä.

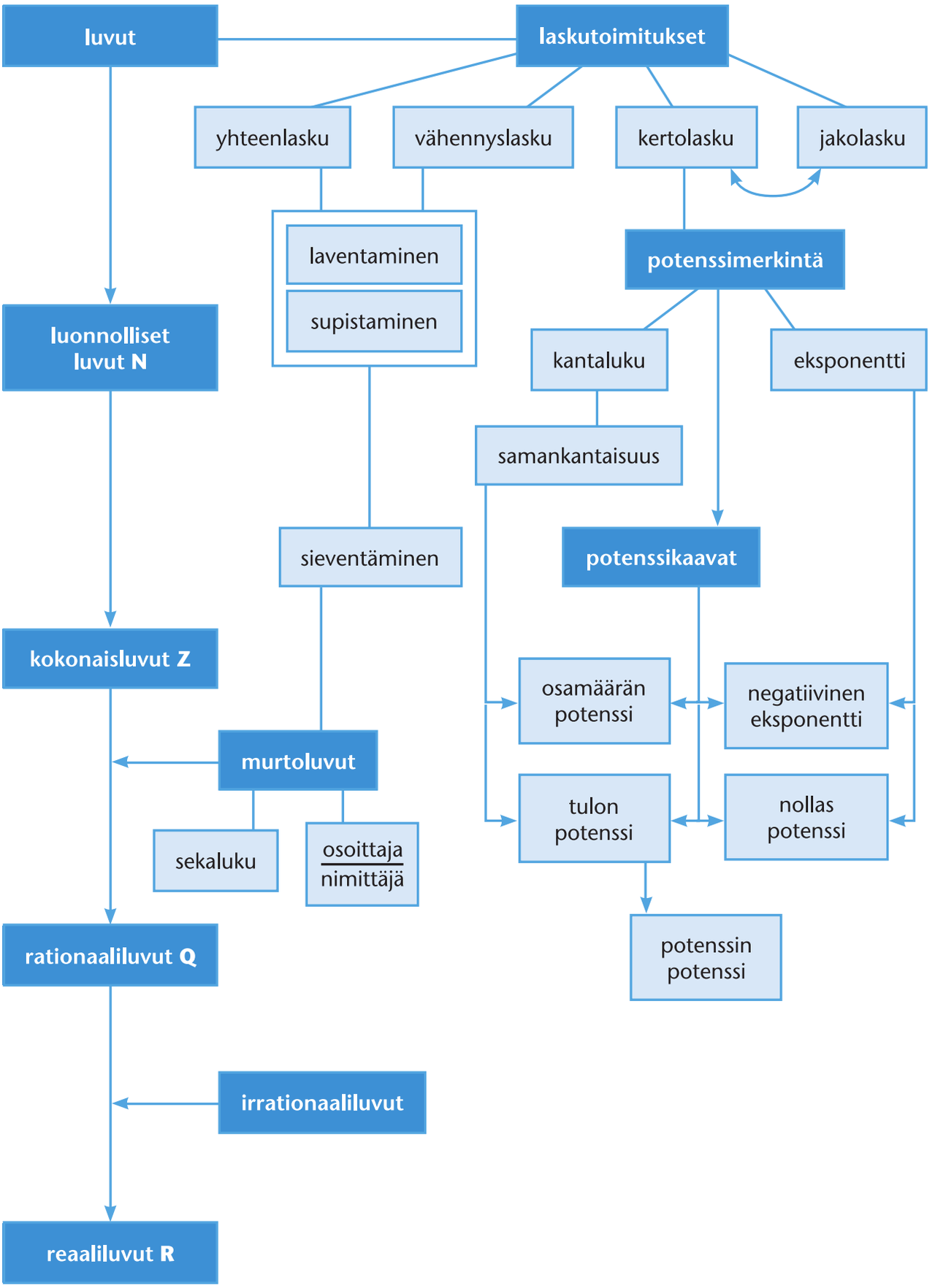
a) $\dfrac{8 \cdot (70^2)^5}{4 \cdot 70^9}$ b) $\dfrac{6(t^3)^2}{3t^4}$

c) $\dfrac{(2^3)^3 \cdot (a^2)^{-2}}{(2a)^3}$ d) $\dfrac{3k^5}{6(k^2)^4} \cdot \dfrac{(5k)^2}{5k^3}$

67. Sievennä lausekkeet.

a) $\left( \dfrac{a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}}} \right)^{100}$ b) $\dfrac{\left(a^{-1\frac{2}{3}} \cdot b^{2\frac{3}{4}}\right)^8}{a^{-12\frac{1}{3}} \cdot b^{20}}$

# Keskeisiä käsitteitä



# 2 Lausekkeilla laskeminen

## 2.1 Lauseke ja laskutoimitukset

**POHDINTA 1**

Tutki seuraavia laskutoimituksia.

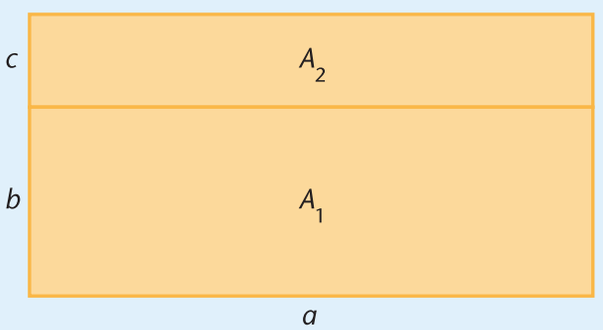
| | |
|---|---|
| $3\text{ kg} + 5\text{ kg}$ | $12\text{ m}^3 - 4\text{ m}^3$ |
| $3\text{ mk} + 5\text{ mk}$ | $12\text{ m}^2 - 4\text{ m}^2$ |
| $3x + 5x$ | $12x^2 - 4x^2$ |
| $4\text{ kg} + 7\text{ mk}$ | $15\text{ m}^2 - 6\text{ m}$ |
| $4x + 7y$ | $5x^2 - 3x$ |

**POHDINTA 2**

Määritä suorakulmion pinta-ala (kannan ja korkeuden tulo) kahdella eri tavalla.

1. Laske ensin koko korkeus ja muodosta sitten pinta-alan lauseke.

2. Laske ensin pienempien suorakulmioiden pinta-alat ja sen jälkeen kokonaispinta-ala.




3. Jos suorakulmion kanta on 4 ja korkeus $3x + 2$, mikä on alan lauseke?

Tasaisessa etenemisliikkeessä kuljettu matka riippuu nopeudesta ja matkaan käytetystä ajasta. Tarkastellaan tilannetta, jossa autolla ajetaan vakionopeudella 80 km/h.

| Matkaan käytetty aika (h) | Kuljettu matka (km) |
|---|---|
| 1 | $1 \cdot 80 = 80$ |
| 2 | $2 \cdot 80 = 160$ |
| 4,5 | $4{,}5 \cdot 80 = 360$ |
| $x$ | $80x$ |

Huomaa, että kertomerkkiä ei aina kirjoiteta: $80x = 80 \cdot x$.

Kun vakionopeudella 80 km/h ajetaan $x$ tuntia, kuljetun matkan **lauseke** on $80x$. Yleisesti lausekkeella tarkoitetaan numeroiden ja kirjaimien avulla merkittyä laskutoimitusta. Esimerkiksi seuraavat ovat lausekkeita:

$5$ $\quad 5 + 3$ $\quad 5 \cdot 3$

$7x - 3$ $\quad 4a$ $\quad \dfrac{a}{b+3}$

**Lauseke**

Lauseke on luku tai numeroiden ja kirjaimien avulla merkitty laskutoimitus.

Lausekkeessa voi siis numeroiden lisäksi olla kirjaimia. Jos lausekkeessa esiintyvän kirjaimen lukuarvo voi muuttua, kirjainta sanotaan **muuttujaksi**.

**Lausekkeen arvo** saadaan, kun lausekkeessa esiintyvälle muuttujalle annetaan jokin lukuarvo ja suoritetaan merkityt laskutoimitukset.

**lauseke**
$5x - 6$

**lausekkeen arvo**, kun
$x = 2$

$5 \cdot 2 - 6 = 4$

**lauseke**
$3 - 4x$

**lausekkeen arvo**, kun
$x = -5$

$3 - 4 \cdot (-5) = 3 + 20 = 23$

## Lausekkeiden yhteen- ja vähennyslasku

Suureet, joilla on sama yksikkö, voidaan yhteenlaskussa yhdistää. Esimerkiksi

$5\text{ kg} + 3\text{ kg} = (5 + 3)\text{ kg} = 8\text{ kg}$ $\quad 4\text{ €} + 2\text{ €} = (4 + 2)\text{ €} = 6\text{ €}$

Vastaavasti voidaan yhdistää lausekeen termit, joissa on sama muuttuja.

- Termejä, joissa on muuttuja, kutsutaan **muuttujatermeiksi**.
- Termejä, joiden muuttujaosat ovat samat, sanotaan **samanmuotoisiksi termeiksi**.

Samanmuotoisten termien yhteenlaskussa sovelletaan osittelulakia $ac + bc = (a + b)c$.

Esimerkiksi termien $2x$ ja $5x$ summa on

$$2x + 5x = (2 + 5)x = 7x$$

Toisin sanoen samanmuotoiset termit yhdistetään laskemalla niiden kertoimet yhteen. Muuttuja pysyy samana.

Vaihtamalla luvun etumerkki saadaan luvun vastaluku. Vastaavasti vaihtamalla lausekkeen kaikkien termien etumerkit saadaan lausekkeen **vastalauseke**.

| Lauseke | Vastalauseke |
|---|---|
| $4x$ | $-4x$ |
| $2x + 1$ | $-2x - 1$ |
| $5 - 6x$ | $-5 + 6x$ |
| $-8a - 9b$ | $8a + 9b$ |

Vastalauseke saadaan vaihtamalla lausekkeen **kaikkien** termien etumerkit.

Luvuilla laskettaessa luvun vähentäminen tarkoittaa vastaluvun lisäämistä. Vastaavasti lausekkeen vähentäminen tarkoittaa vastalausekkeen lisäämistä.

Esimerkiksi lausekkeiden $5x - 6$ ja $2x + 1$ erotus saadaan lisäämällä lausekkeeseen $5x - 6$ lausekkeen $2x + 1$ vastalauseke $-2x - 1$.

$$\begin{aligned}
&(5x - 6) - (2x + 1)\\
&= (5x - 6) + (-2x - 1)\\
&= 5x - 6 - 2x - 1\\
&= (5 - 2)x - 6 - 1\\
&= 3x - 7
\end{aligned}$$

Sulkuja poistettaessa voidaan soveltaa seuraavia sääntöjä:

- **Jos sulkujen edessä on +-merkki,** niin sulkuja poistettaessa kaikkien termien **etumerkit säilyvät ennallaan.**

$$(5x - 6) + (-2x + 1) = 5x - 6 - 2x + 1$$

- **Jos sulkujen edessä on –-merkki,** niin sulkuja poistettaessa kaikkien sulkujen sisällä olevien termien **etumerkit vaihtuvat vastakkaisiksi.**

$$(5x - 6) - (-2x + 1) = 5x - 6 + 2x - 1$$

**Lausekkeiden yhteen- ja vähennyslasku**

Samanmuotoisilla termeillä on sama muuttujaosa.

Lausekkeiden **yhteenlaskussa** samanmuotoiset termit yhdistetään laskemalla yhteen termien kertoimet ja saadulla summalla kerrotaan termien yhteinen muuttujaosa.

Lausekkeiden **vähennyslaskussa** samanmuotoiset termit yhdistetään vähentämällä toisistaan termien kertoimet ja saadulla erotuksella kerrotaan termien yhteinen muuttujaosa. Erimuotoisia termejä ei voi yhdistää.

Lausekkeiden yhteen- ja vähennyslaskussa kannattaa edetä seuraavasti:

1. Kirjoita summa tai erotus. **Käytä ensin sulkuja.**
2. Poista sulut.
3. Yhdistä samanmuotoiset termit.

ESIMERKKI 1

Laske lausekkeiden $2a - 5$ ja $-3a + 4$

a) summa b) erotus.

RATKAISU

a) $(2a - 5) + (-3a + 4)$
$= 2a - 5 - 3a + 4$
$= (2 - 3)a - 5 + 4$
$= -a - 1$

Huom!
$-1 \cdot a = -a$

b) $(2a - 5) - (-3a + 4)$
$= 2a - 5 + 3a - 4$
$= 5a - 9$

VASTAUS

a) $-a - 1$ b) $5a - 9$

## Lausekkeen kertominen luvulla

Kertolaskun liitäntälain mukaan kertolaskussa voidaan suluilla muuttaa laskujärjestystä tulon arvon muuttumatta.

$$a(bc) = (ab)c$$

$$2 \cdot (5a) = (2 \cdot 5)a = 10a$$

Jos kerrottava lauseke sisältää useampia termejä, kertolaskussa käytetään osittelulakia.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$2(x + 4) = 2 \cdot x + 2 \cdot 4 = 2x + 8$$

**Lausekkeen kertominen luvulla**

Lauseke kerrotaan luvulla siten, että jokainen lausekkeen termi kerrotaan luvulla erikseen ja saadut tulot lasketaan yhteen.

$a(b + c) = ab + ac$

$a(b - c) = ab - ac$

ESIMERKKI 2

Laske seuraavat kertolaskut.

a) $4(6x + 5)$ b) $(2t - 7) \cdot 3$

RATKAISU

a) $4(6x + 5)$
$= 4 \cdot 6x + 4 \cdot 5$
$= 24x + 20$

b) Koska tulo on vaihdannainen, tulon tekijöiden paikkaa voidaan vaihtaa.
$(2t - 7) \cdot 3$
$= 3(2t - 7)$
$= 3 \cdot 2t + 3 \cdot (-7)$
$= 6t - 21$

VASTAUS

a) $24x + 20$ b) $6t - 21$

## Lausekkeen jakaminen luvulla

Tarkastellaan lausekkeen jakamista luvulla kirjoittamalla jakolasku kertolaskuksi. Jakolasku voidaan kirjoittaa kertolaskuksi, jossa jaettava kerrotaan jakajan käänteisluvulla: $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$.

$$\frac{(a+b)}{c} = (a+b) \cdot \frac{1}{c}$$

suoritetaan kertolasku

$$a \cdot \frac{1}{c} + b \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\frac{(4+2x)}{2} = (4+2x) \cdot \frac{1}{2}$$

suoritetaan kertolasku

$$4 \cdot \frac{1}{2} + 2x \cdot \frac{1}{2} = 2 + x$$

**Lausekkeen jakaminen luvulla**

Lauseke jaetaan luvulla siten, että jokainen lausekkeen termi jaetaan luvulla erikseen.

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$$

ESIMERKKI 3

Suorita jakolaskut.

a) $\frac{6x+8}{2}$ b) $\frac{20a-15}{5}$

RATKAISU

a) $\frac{6x+8}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{8}{2} = 3x + 4$

b) $\frac{20a-15}{5} = \frac{20a}{5} - \frac{15}{5} = 4a - 3$

VASTAUS

a) $3x + 4$ b) $4a - 3$

# Tehtäviä

68. Laske lausekkeen arvo, kun $x = 4$.

a) $3x - 1$ b) $x^2 + 2x - 5$

69. Laske lausekkeen $4x - 3x^2$ arvo, kun

a) $x = 0$ b) $x = -2$ c) $x = -\frac{1}{2}$.

70. Laske lausekkeen $3x^2 - 4x + 6$ arvo, kun

a) $x = 2$ b) $x = -3$ c) $x = \frac{4}{3}$.

71. Auton jarrutusmatkaa $s$ metreinä kuvaa lauseke $0{,}25x + 0{,}01x^2$, jossa $x$ on auton nopeus kilometreinä tunnissa.

a) Laske jarrutusmatka, kun auton nopeus on 50 km/h.
b) Jos nopeus kasvaa kaksinkertaiseksi nopeudesta 50 km/h nopeuteen 100 km/h, niin miten käy jarrutusmatkan?

**Lausekkeiden yhteen- ja vähennyslasku**

72. Sievennä lauseke.

a) $3x - 3 - 6x + 7$
b) $2x - (x - 6) + (x - 1)$
c) $x^2 - (8x^2 - 5x) - (x - 3x^2)$

73. Sievennä lauseke.

a) $-2y^3 + 3y - 4y^3 - 4y$
b) $(4y + 2) - (2y - 1)$
c) $y^2 - (-y^2 + 3y) - (2y^2 - 5y)$

74. Sievennä lauseke.

a) $5x + (3a - 2x - a) + \left(-\frac{1}{2}a - x\right)$

b) $\frac{1}{2}x - [-x - 2 - (-3x - 5)]$

c) $4x^3 - [x^2 - (5x^3 - 3x^2) + (x^2 - 6x^3)]$

75. Laske lausekkeen $4x^3 - (x^3 - x^2) - (2x^3 + x^2 + 2x)$ arvo, kun $x = 999$.

E1 76. Kirjoita ja sievennä lausekkeiden $x^2 - 3x - 4$ ja $-3 - 5x + x^2$

a) summa b) erotus.

77. Muodosta ja sievennä lausekkeiden $3x^2 - 5x$ ja $-x^2 - 2x$ summan ja erotuksen erotus.

78. Suorakulmion kannan pituus on $5x - 4$ ja korkeus 3 yksikköä kantaa lyhyempi.

a) Muodosta lauseke, joka kuvaa suorakulmion piiriä.
b) Laske piiri, kun $x = 10$.

**Lausekkeen kertominen luvulla**

79. Sievennä.

a) $3(7x + 2)$ b) $5(2 - 3x)$ c) $-1(4x - 9)$

E2 80. Sievennä.

a) $6(3x - 5)$ b) $(4p + 2) \cdot 7$ c) $-3(8 - 2k)$

81. Sievennä.

a) $5(2x + 3)$ b) $3a(4a - a^2)$ c) $(3a - 4a^2) \cdot 10a^3$

82. Torikauppias myy perunoita hintaan 2 €/kg. Päivän aikana kauppias myy keskimäärin 600 kg perunoita.

a) Muodosta lauseke, joka kuvaa torikauppiaan päivän myyntituloja, kun hän myy perunoita $x$ kg keskimääräistä määrää enemmän.
b) Laske a-kohdan lausekkeen avulla torikauppiaan myyntitulot, kun päivän perunan myynti on 150 kg keskimääräistä pienempi.

**Lausekkeen jakaminen luvulla**

83. Sievennä.

a) $\frac{-5x}{5}$ b) $-\frac{5x}{5}$ c) $\frac{-5x}{-5}$

E3 84. Suorita jakolasku.

a) $\frac{18x + 9}{3}$ b) $\frac{12y - 16}{4}$ c) $\frac{10a - 30}{-10}$

85. Sievennä.

a) $\frac{6t + 3}{3}$ b) $\frac{-8x + 6}{-2}$ c) $-\frac{-9x + 12}{-3}$

86. Sievennä.

a) $\frac{21a^2 - 7a + 28}{7}$ b) $\frac{16s - 4}{-8}$ c) $\frac{8y^2 + 5y - 1}{-2}$

87. Sievennä.

a) $\dfrac{-9x^3+27x}{3x}$ b) $\dfrac{12z^5+16z^3-36z^2}{-4z^2}$

**Sekalaisia tehtäviä**

88. Laske lausekkeen $-3x^2+5x-6$ arvo, kun

a) $x=4$ b) $x=-3$ c) $x=\frac{1}{3}$.

89. Sievennä.

a) $(x^3-4x^2+6x-2)+(4x^2-3x-9)$
b) $(4x^2+6x-8)-[(x^2+3x)-(4x^2+5x+6)]$

90. Sievennä.

a) $4(9x-3)$ b) $(5x-1)\cdot(-3)$ c) $2a(3a-4)$

91. Sievennä.

a) $\dfrac{8x+24}{4}$ b) $\dfrac{21-7x}{7}$ c) $\dfrac{6y^3-9y}{-3}$

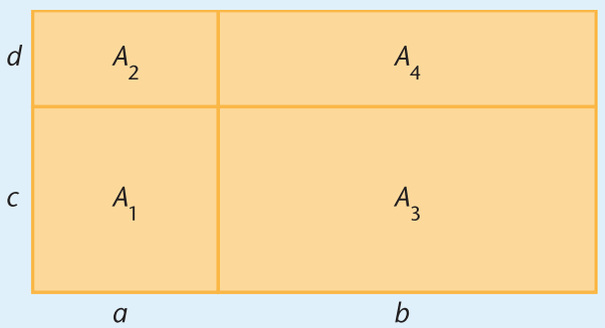
92. Kuntosalin A jäsenyys maksaa 70 euroa, ja jäsenmaksun lisäksi asiakas maksaa 5 euron käyntimaksun jokaisesta kerrasta. Kuntosali B ei peri asiakkailtaan jäsenmaksua, ja jokainen käyntikerta maksaa 12 euroa.
a) Muodosta lausekkeet, jotka kuvaavat kuntosalilla käynnin kustannuksia kuntosalilla A ja kuntosalilla B, kun käyntikertojen määrä on $x$.
b) Kumpaa kuntosalia on edullisempaa käyttää, jos käyntikertoja on 15 kappaletta?

# 2.2 Polynomi

**POHDINTA 1** Määritä alla olevan suorakulmion pinta-ala kahdella eri tavalla.

1. Laske ensin koko kanta ja korkeus ja muodosta sitten pinta-alan lauseke.

2. Laske ensin pienempien suorakulmioiden pinta-alat ja sen jälkeen kokonaispinta-ala.

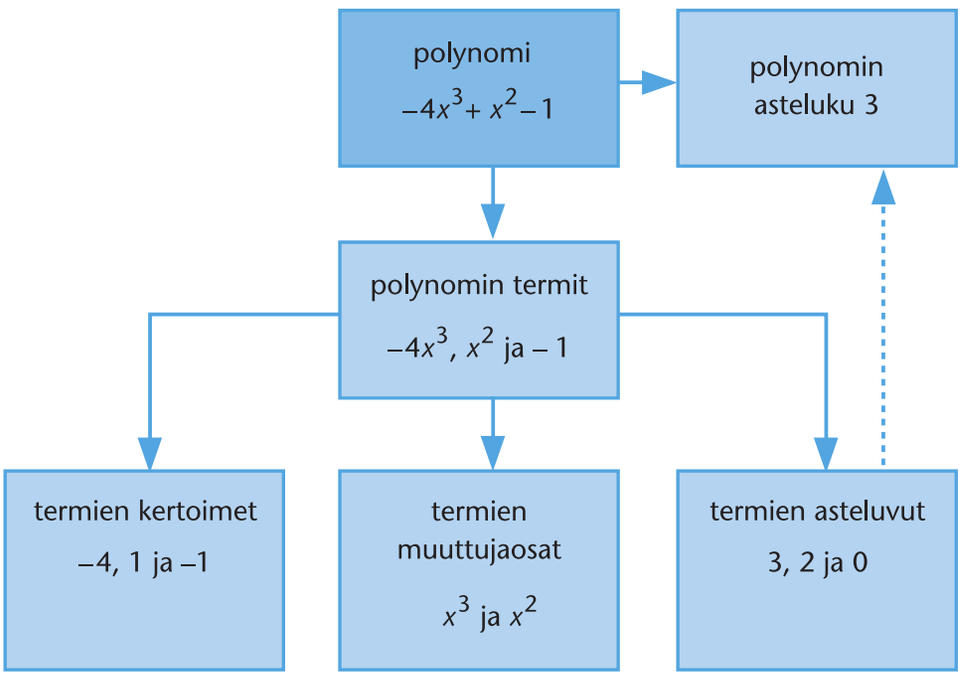



3. Jos suorakulmion kanta on $3x + 7$ ja korkeus $2x + 4$, mikä on sen pinta-ala?

Matemaattinen malli helpottaa tilanteeseen liittyvän ongelman käsittelyä. Esimerkiksi monien fysikaalisten ilmiöiden mallintamiseen käytetään polynomeja. Tällöin yksittäisten lukuarvojen sijaan käytetään muuttujia, jolloin tilanne voidaan kuvata yleisessä muodossa. Ongelman ratkaisemisessa mallin muodostaminen on usein vaikein vaihe.

**Polynomi** on summalauseke, jonka jokainen yhteenlaskettava eli **termi** koostuu kertoimesta ja muuttujaosasta (kirjainosasta). Termi voi olla myös pelkkä luku, jolloin sitä kutsutaan **vakiotermiksi**.

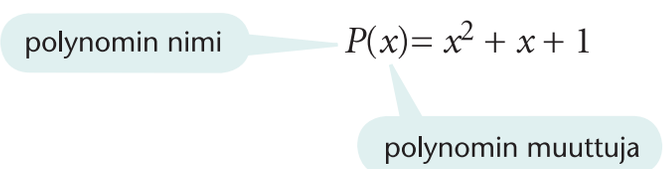
Polynomeja voidaan luokitella **polynomin asteluvun** avulla. Polynomin asteluku on sama kuin sen korkeinta astetta olevan termin eksponentti. **Termin asteluku** on termin muuttujaosan eksponentti. Eksponentin on oltava positiivinen kokonaisluku tai nolla.




Kaikki lausekkeet eivät ole polynomeja. Esimerkiksi lausekkeessa $3x + 2x^{-1}$ on muuttujan $x$ negatiivinen potenssi ja lausekkeessa $\sqrt{4x^3 + x}$ on neliöjuuri. Ne eivät siis ole polynomeja.

Polynomeja voidaan luokitella myös termien lukumäärän mukaan. Jos polynomissa on vain yksi termi, sitä sanotaan **monomiksi**. Kaksiterminen polynomi on **binomi** ja kolmiterminen **trinomi**. Polynomeilla, joissa on enemmän kuin kolme termiä, ei ole erityisiä nimiä. Edellä käsitelty polynomi $-4x^3 + x^2 - 1$ on trinomi.

Polynomille voidaan antaa nimi, joka on yleensä iso kirjain. Jos esimerkiksi trinomin $x^2 + x + 1$ nimeksi annetaan $P$, niin merkitään



Polynomin arvolla tarkoitetaan lukua, joka saadaan, kun muuttujan paikalle sijoitetaan annettu luku.

Esimerkiksi polynomin $P(x) = 3x^2 - 6x - 9$ arvo, kun

- $x = 1$, on $P(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 9 = -12$
- $x = -2$, on $P(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 9 = 15$
- $x = 3$, on $P(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 9 = 0$
- $x = 0$, on $P(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 9 = -9$

## Polynomien yhteen- ja vähennyslasku

Polynomien termejä sanotaan **samanmuotoisiksi**, jos niiden muuttujaosat ovat samat. Vain keskenään samanmuotoiset termit voidaan yhdistää.

Polynomit ovat tietyn muotoisia lausekkeita, joten niiden yhteen- ja vähennyslaskussa sovelletaan samoja laskusääntöjä kuin muidenkin lausekkeiden summia ja erotuksia laskettaessa.

**Polynomien yhteen- ja vähennyslasku**

Polynomien **yhteenlaskussa** samanmuotoisten termien kertoimet lasketaan yhteen.

Polynomien **vähennyslaskussa** samanmuotoisten termien kertoimet vähennetään toisistaan.

### Esimerkki 1

Merkitään $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$ ja $Q(x) = -4x^3 + 3x - 4$. Sievennä.
a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

### Ratkaisu

a) $P(x) + Q(x)$
$= 3x^2 - 4x - 4 + (-4x^3 + 3x - 4)$
$= 3x^2 - 4x - 4 - 4x^3 + 3x - 4$
$= -4x^3 + 3x^2 - x - 8$

b) $P(x) - Q(x)$
$= 3x^2 - 4x - 4 - (-4x^3 + 3x - 4)$
$= 3x^2 - 4x - 4 + 4x^3 - 3x + 4$
$= 4x^3 + 3x^2 - 7x$

1. Kirjoita laskutoimitus. Käytä sulkuja.
2. Poista sulut.
3. Yhdistä samanmuotoiset termit.

### Vastaus

a) $-4x^3 + 3x^2 - x - 8$ b) $4x^3 + 3x^2 - 7x$

## Polynomien kertolasku

Kahden monomin kertolaskussa termien kertoimet kerrotaan keskenään ja vastaavasti samankantaiset potenssit keskenään. Muuttujaosien kertolaskussa käytetään hyväksi samankantaisten potenssien **tulon** laskusääntöä $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$4x^3 \cdot 5x^5 = 4 \cdot 5 \cdot x^{3+5} = 20x^8$$

Kahden monomin tulossa kertoimet kerrotaan keskenään ja vastaavasti samankantaiset potenssit keskenään.

Monomin ja binomin kertolaskussa sovelletaan kertolaskun osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

$$2x(5x + 3) = 2x \cdot 5x + 2x \cdot 3 = 10x^2 + 6x$$

**Monomin ja polynomin tulo**

Monomin ja polynomin kertolaskussa monomilla kerrotaan jokainen polynomin termi ja saadut tulot lasketaan yhteen.

$$a(b + c) = ab + ac$$

ESIMERKKI 2

Sievennä lausekkeet.

a) $-2x^2 \cdot 8x^4$ b) $-3x^2(5x^3 - 7x + 2)$

RATKAISU

a) Kertoimet kerrotaan keskenään ja muuttujaosat keskenään käyttäen potenssikaavaa $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

$$-2x^2 \cdot 8x^4 = -2 \cdot 8 \cdot x^{2+4} = -16x^6$$

b) Termillä $-3x^2$ kerrotaan erikseen jokainen sulkujen sisällä oleva termi.

$$\begin{aligned} -3x^2(5x^3 - 7x + 2) &= -3x^2 \cdot 5x^3 - 3x^2 \cdot (-7x) - 3x^2 \cdot 2 \\ &= -3 \cdot 5 \cdot x^{2+3} - 3 \cdot (-7) \cdot x^{2+1} - 3 \cdot 2 \cdot x^2 \\ &= -15x^5 + 21x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

VASTAUS

a) $-16x^6$ b) $-15x^5 + 21x^3 - 6x^2$

Pohdintatehtävässä esiteltyä laskusääntöä

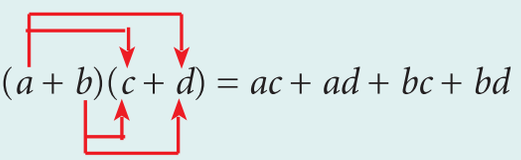
$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

sovelletaan polynomien tuloa laskettaessa. Kertomisen jälkeen samanmuotoiset termit yhdistetään.

$$\begin{aligned}(x + 2)(2x - 1) &= x \cdot 2x + x \cdot (-1) + 2 \cdot 2x + 2 \cdot (-1)\\ &= 2x^2 - x + 4x - 2\\ &= 2x^2 + 3x - 2\end{aligned}$$

**Kahden polynomin tulo**

Kahden polynomin kertolaskussa kaikki termit kerrotaan vuoron perään toisillaan ja saadut tulot lasketaan yhteen.




Mikäli lauseke sisältää useita eri laskutoimituksia, sievennettäessä on muistettava seuraava laskujärjestys:

1. sulkuihin merkityt laskutoimitukset
2. kerto- ja jakolaskut
3. yhteen- ja vähennyslaskut.

Kun poistaa sulkuja ja suorittaa laskutoimituksia, välivaiheita kannattaa kirjoittaa näkyviin riittävän paljon, jotta välttyy turhilta huolimattomuusvirheiltä.

ESIMERKKI 3

Laske.

a) $(2x^3 + x)(x^2 - 2x + 2)$ b) $(x + 3)^2$

RATKAISU

a) $(2x^3 + x)(x^2 - 2x + 2)$

$= 2x^3 \cdot x^2 + 2x^3 \cdot (-2x) + 2x^3 \cdot 2 + x \cdot x^2 + x \cdot (-2x) + x \cdot 2$

$= 2x^5 - 4x^4 + 4x^3 + x^3 - 2x^2 + 2x$

$= 2x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x$

Muistikaavat s. 145

b) $(x+3)^2$ Kirjoita potenssi ensin tulona.

$= (x+3)(x+3)$

$= x \cdot x + x \cdot 3 + 3 \cdot x + 3 \cdot 3$

$= x^2 + 3x + 3x + 9$

$= x^2 + 6x + 9$

VASTAUS a) $2x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 2x$ b) $x^2 + 6x + 9$

ESIMERKKI 4

Sievennä.

a) $2x - (x-5) - (x+3)(x-1)$ b) $2x(x+2)(x^2-2)$

RATKAISU

a) $2x - (x-5) - (x+3)(x-1)$

$= 2x - (x-5) - (x^2 - x + 3x - 3)$

$= 2x - x + 5 - x^2 + x - 3x + 3$

$= -x^2 + 2x - x + x - 3x + 5 + 3$

$= -x^2 - x + 8$

1. Laske ensin kertolasku. Muista kirjoittaa tulos sulkuihin!
2. Poista sulut.
3. Yhdistä samanmuotoiset termit.

b) $2x(x+2)(x^2-2)$

$= (2x \cdot x + 2x \cdot 2)(x^2 - 2)$

$= (2x^2 + 4x)(x^2 - 2)$

$= 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot (-2) + 4x \cdot x^2 + 4x \cdot (-2)$

$= 2x^4 - 4x^2 + 4x^3 - 8x$

$= 2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 8x$

1. Kerro monomilla ensimmäinen polynomi. Kirjoita kertolaskun tulos sulkuihin.
2. Kerro polynomit keskenään.
3. Kirjoita termit lopuksi alenevien potenssien mukaan.

VASTAUS a) $-x^2 - x + 8$ b) $2x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 8x$

**ESIMERKKI 5**

Lantunviljelijä arvioi elokuussa sadon määräksi 150 kg. Syksyn edetessä lanttujen määrä kasvaa noin viisi kilogrammaa vuorokaudessa. Jos viljelijä veisi satonsa torille arviointihetkellä, hän saisi 1,5 €/kg. Hinta kuitenkin laskee joka päivä 0,10 €/kg.

a) Muodosta polynomi $T(x)$, joka kuvaa viljelijän saamaa myyntituloa, kun nykyhetkestä on kulunut $x$ vuorokautta.
b) Laske polynomin avulla, mikä olisi myyntitulo 10 vuorokauden kuluttua.

**RATKAISU**

Muodostetaan lauseke seuraavan taulukon avulla:

| d | Lanttujen määrä (kg) | Hinta (€/kg) | Myyntitulo (€) |
|---|---|---|---|
| 0 | 150 | 1,5 | $150 \cdot 1{,}5$ |
| 1 | $150 + 5$ | $1{,}5 - 0{,}10$ | $(150 + 5)(1{,}5 - 0{,}10)$ |
| 2 | $150 + 2 \cdot 5$ | $1{,}5 - 2 \cdot 0{,}10$ | $(150 + 2 \cdot 5)(1{,}5 - 2 \cdot 0{,}10)$ |
| 3 | $150 + 3 \cdot 5$ | $1{,}5 - 3 \cdot 0{,}10$ | $(150 + 3 \cdot 5)(1{,}5 - 3 \cdot 0{,}10)$ |
| 4 | $150 + 4 \cdot 5$ | $1{,}5 - 4 \cdot 0{,}10$ | $(150 + 4 \cdot 5)(1{,}5 - 4 \cdot 0{,}10)$ |
| $x$ | $150 + x \cdot 5$ | $1{,}5 - x \cdot 0{,}10$ | $(150 + x \cdot 5)(1{,}5 - x \cdot 0{,}10)$ |

Viljelijän saamaa myyntituloa $T$ kuvaa polynomi

$$\begin{aligned} T(x) &= (150 + 5x)(1{,}5 - 0{,}10x) \\ &= 150 \cdot 1{,}5 + 150 \cdot (-0{,}10x) + 5x \cdot 1{,}5 + 5x \cdot (-0{,}10x) \\ &= 225 - 15x + 7{,}5x - 0{,}5x^2 \\ &= 225 - 7{,}5x - 0{,}5x^2 \\ &= -0{,}5x^2 - 7{,}5x + 225 \end{aligned}$$

Polynomifunktio s.146

b) Myyntitulo 10 vuorokauden kuluttua on

$$T(10) = -0{,}5 \cdot 10^2 - 7{,}5 \cdot 10 + 225 = 100$$

**VASTAUS**

a) Myyntituloa kuvaa lauseke $T(x) = -0{,}5x^2 - 7{,}5x + 225$.
b) Myyntitulo 10 vuorokauden kuluttua on 100 €.

# Tehtäviä

93. Mitkä seuraavista lausekkeista ovat polynomeja?

a) $3x^2 - 4x + 5$ b) $\frac{2}{x}$ c) $1 + \frac{1}{3}x^2$

d) $-1$ e) $-1{,}25x + 2{,}3$ f) $2\pi r$

g) $\pi r^2$ h) $2x^4 + \sqrt[3]{x}$

94. Täytä seuraava taulukko.

| Polynomi | Nimi | Termit | Termien asteluvut | Kertoimet | Muuttujaosat | Polynomin asteluku |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | | | | | |
| $-2x^3+x^2-3x+6$ | | | | | | |
| $\frac{1}{2}x-x^2+x^5$ | | | | | | |

95. Olkoon $P(x) = 3x^2 - 2x + 1$ ja $P(2) - Q(3) = 1$. Päättele, mitä on $Q(3)$.

96. $P(x) = -x - 3$. Määritä polynomin $R$ lauseke, kun $R(x) = P(x^2 - 2x + 1)$.

**Polynomien yhteen- ja vähennyslasku**

97. Olkoon $Q(x) = x - 2$ ja $P(x) = 4x - 5$.
a) Laske polynomien $Q$ ja $P$ summa.
b) Laske polynomien $Q$ ja $P$ erotus.
c) Laske $Q(2) + P(1)$.

E1 98. Merkitään $P(x) = 5x^2 - 2x + 7$ ja $Q(x) = 2x^2 - 3x - 9$. Sievennä.

a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

99. Olkoon $P(x) = x^2 + 2$, $Q(x) = -x^2 + 3x$ ja $R(x) = -2x - 1$. Sievennä.

a) $P(x) - Q(x) - R(x)$ b) $-P(x) - [1 - Q(x)]$

100. Merkitään $P(a) = 3 - 4a^2$ ja $Q(a) = 4a^2 - 6a + 8$. Muodosta ja sievennä polynomin $R(a)$ lauseke, kun $R(a) = 5a - [Q(a) - P(a)]$. Laske $R(-2)$.

**Polynomien kertolasku**

Sievennä tehtävien 101–111 lausekkeet.

101. a) $3 \cdot 4a^2$ b) $-2x \cdot 3x^2 \cdot (-6x^2)$ c) $(4x)^2 \cdot (-x)$

E2 102. a) $4x^3 \cdot (-5x^4)$ b) $-2x^3(3x^2 - 6x + 5)$

103. a) $5a(a^2 - 3a)$ b) $(2 - 4x - x^2)(-3x)$

104. a) $(x + 2)(2x + 3)$ b) $(5x - 1)(x^2 - 3x)$

105. a) $(3x + 4)(2x + 5)$ b) $(2x - 4)(1 - 2x)$

106. a) $(2x - 1)(2x^2 - x + 3)$ b) $(x - 3)(4 - 6x - x^2)$

E3 107. a) $(3x^2 + 2)(2x^2 - 5x - 1)$ b) $(x + 2)^2$

108. a) $(x - 4)^2$ b) $(3x - 5)^2$

E4 109. a) $5x - (2x - 3)(x - 4)$ b) $-3x(x + 5)(2x - 1)$

110. a) $3x(1 - x - x^2) + 3x^2(x + 4)$

b) $5x(2x + 3) - (3x - 4)(2x + 1)$

111. a) $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$

b) $(x - 2)^2 - (2x - 1)x - 2(1 - 2x)$

112. Sievennä seuraavat lausekkeet, kun $P(x) = 5x - 2$ ja $Q(x) = 2x - 5$.

a) $[P(x) - Q(x)][P(x) + Q(x)]$

b) $1 - P(x)Q(x)$

113. Sievennä polynomi $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(x - 4) - (x^2 - 5x + 4)(x - 2)$ ja määritä

a) $P(0)$ b) $P(2)$ c) $P(4)$.

114. Sievennä lausekkeet.

a) $(x + 1)^3$ b) $x^m(x^{2m-3} + x^{3m}) - x^{m-1}(x^{-m+2})$

115. Osoita, että $a^2 + b^2 = c^2$, kun $a = 2mn$, $b = m^2 - n^2$ ja $c = m^2 + n^2$.

116. Suorakulmion kanta on $x$ cm ja korkeus $y$ cm. Kantaa suurennetaan 4 cm ja korkeutta suurennetaan 3 cm. Määritä suurennetun suorakulmion a) piiri b) pinta-ala.

E5 117. Elokuvateatterissa kävijöiden määrä riippuu lipun hinnasta. Kun lippu maksaa 8 €, elokuvateatterissa käy 6500 henkilöä viikossa. Jos lipun hintaa nostetaan 1 €, kävijöiden määrä vähenee 150 henkilöllä viikossa.

a) Muodosta ja sievennä lauseke, joka kuvaa teatterin viikoittaisten myyntitulojen riippuvuutta lipun hinnan muutoksesta $x$.

b) Laske lausekkeen avulla viikon myyntitulot, jos lipun hinta on 11,50 euroa?

118. Suorakulmion muotoisen maa-alueen ympärysmitta oli 500 m. Merkitään toisen sivun pituutta kirjaimella $x$.

a) Millainen lauseke kuvaa tällöin toista sivua?

b) Määrittele pinta-alan $A(x)$ lauseke ja sievennä se.

c) Mikä on pinta-ala, kun $x = 80$ m?

119. Sievennä lauseke $(a + b)^2 - (a - b)^2$ ja laske sen tarkka arvo, kun $a = 100^{300}$ ja $b = 100^{-300}$. [K1991, 1a]

## Sekalaisia tehtäviä

120. Sievennä.

a) $-3xy^2 \cdot 3x^4y^5$ b) $-6xy(x^2 + xy - y^3)$

121. Sievennä.

a) $(x + 7)(3x + 1)$ b) $(2x - 1)(2x + 1)$ c) $(1 - 4x)(3 - x)$

122. Sievennä.

a) $(3x - 2)^2$ b) $2x(x + 3)(2x - 1)$

c) $5x^2 - (x^2 - 3x)(1 - 2x)$

123. Kun marjatilalla on 50 poimijaa, niin yksi poimija kerää satokauden aikana keskimäärin 1200 kg marjoja. Jokainen ylimääräinen poimija vähentää poimijoiden keskimääräistä saalista 10 kg. Muodosta lauseke, joka kuvaa satokauden aikana kerättyä marjamäärää, kun tila palkkaa $x$ ylimääräistä poimijaa. Kuinka paljon marjoja kerää 60 poimijaa?

# 2.3 Murtolausekkeita

Lukujen lisäksi myös lausekkeita voidaan laskea yhteen, vähentää, kertoa ja jakaa. Lausekkeilla laskettaessa lopputulos ei kuitenkaan aina ole yhtä yksinkertainen – yksi luku – kuin luvuilla laskettaessa. Tavoitteena kuitenkin on muokata lauseke mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Tätä lausekkeen yksinkertaistamista sanotaan **lausekkeen sieventämiseksi**.

Lausekkeen sieventämisellä tarkoitetaan lausekkeeseen merkittyjen laskutoimitusten suorittamista niin pitkälle kuin mahdollista. Jos lausekkeessa on murtolukuja, niitä voidaan mahdollisesti supistaa. Sievennettäessä lauseke muuttuu yksinkertaisemman näköiseksi.

Nimittäjien poiskertominen ei ole lausekkeen sieventämistä. Se liittyy yhtälön ratkaisemiseen, jota käsitellään luvussa 3.

**Lausekkeen sieventäminen**

Lauseke muokataan mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

- Suoritetaan merkityt laskutoimitukset.
- Supistetaan, mikäli mahdollista.

## Murtolausekkeet

Joskus lausekkeessa voi olla muuttujia myös nimittäjässä. Tällaisia lausekkeita ovat esimerkiksi **murto**- eli **rationaalilausekkeet**. Murtolausekkeen osoittaja ja nimittäjä ovat polynomeja. Murtolausekkeita ovat esimerkiksi seuraavat:

$$\frac{1}{x} \qquad \frac{5}{x^2 - 9x + 1}$$

$$\frac{8x + 24}{16 - 4x} \qquad \frac{2x^2 - 2}{3x^3 - 3}$$

Murtolausekkeiden sieventämisessä sovelletaan murtolukujen laskusääntöjä.

- Murtolausekkeita voidaan laskea **yhteen** ja **vähentää** toisistaan vain jos niillä on sama nimittäjä. Varsinainen laskutoimitus suoritetaan osoittajilla.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \qquad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

- Murtolausekkeita **kerrottaessa** osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- Murtolausekkeiden **jakolasku** muutetaan kertolaskuksi.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

ESIMERKKI 1

Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{2x-1}{x+3}-\dfrac{x-1}{x+3}$ b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}$

RATKAISU

a) Lausekkeilla on sama nimittäjä, joten vähennyslasku voidaan suorittaa. Suoritetaan vähennyslasku osoittajilla. Nimittäjässä oleva lauseke säilyy muuttumattomana.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+3}-\frac{x-1}{x+3}&=\frac{2x-1-(x-1)}{x+3}\\&=\frac{2x-1-x+1}{x+3}\\&=\frac{x}{x+3}\end{aligned}$$

Käytä sulkuja merkkivirheiden välttämiseksi.

b) Jotta lauseketta voidaan sieventää, nimittäjät on lavennettava samannimisiksi.

$$\begin{aligned}\overset{x-1)}{\frac{1}{x}}+\overset{x)}{\frac{2}{x-1}}&=\frac{x-1}{x(x-1)}+\frac{2x}{x(x-1)}\\&=\frac{x-1+2x}{x^2-x}\\&=\frac{3x-1}{x^2-x}\end{aligned}$$

$\overset{d)}{\frac{a}{b}}+\overset{b)}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$

VASTAUS

a) $\dfrac{x}{x+3}$ b) $\dfrac{3x-1}{x^2-x}$

**ESIMERKKI 2** Laske.

a) $\frac{2x}{5} \cdot \frac{10}{x}$ b) $\frac{3x}{7} : \frac{4}{21x}$

Jakolasku voidaan kirjoittaa myös jakoviivan avulla: $\dfrac{\frac{3x}{7}}{\frac{4}{21x}}$

**RATKAISU** a) Kerrotaan osoittajat ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{2x}{5} \cdot \frac{10}{x} = \frac{2 \overset{1}{\cancel{x}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{x}}} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = \frac{4}{1} = 4$$

b) Muutetaan jakolasku kertolaskuksi.

Kirjoita kertolasku ensin yhden jakoviivan avulla ja supista tulon tekijöitä, mikäli mahdollista.

$$\frac{3x}{7} : \frac{4}{21x} = \frac{3x}{7} \cdot \frac{21x}{4} = \frac{3x \cdot \overset{3}{\cancel{21}}\, x}{\underset{1}{\cancel{7}} \cdot 4} = \frac{3x \cdot 3x}{1 \cdot 4} = \frac{9x^2}{4}$$

**VASTAUS** a) 4 b) $\frac{9x^2}{4}$

**Yhteisen tekijän erottaminen**

Kun lauseke kerrotaan luvulla, käytetään reaalilukujen osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

Jos tämä sääntö luetaan oikealta vasemmalle, saadaan sääntö

$$ab + ac = a(b + c),$$

jota tarvitaan yhteisen tekijän erottamisessa. Yhteisen tekijän avulla lauseke saadaan tulomuotoon. Tätä tarvitaan esimerkiksi murtolausekkeita supistettaessa.

**ESIMERKKI 3** Kirjoita lauseke tulomuotoon yhteisen tekijän avulla.

a) $15x + 20$ b) $3ab + 5a$

**RATKAISU**

a) $15x + 20$
$= 5 \cdot 3x + 5 \cdot 4$
$= 5 \cdot (3x + 4)$
$= 5(3x + 4)$

b) $3ab + 5a$
$= a \cdot 3b + a \cdot 5$
$= a \cdot (3b + 5)$
$= a(3b + 5)$

**VASTAUS** a) $5(3x + 4)$ b) $a(3b + 5)$

**ESIMERKKI 4** Sievennä.

a) $\dfrac{8x+24}{16-4x}$ b) $\dfrac{2x^2-2}{3x^3-3}$

**RATKAISU** Kirjoitetaan lausekkeiden osoittajat ja nimittäjät tulomuodossa yhteisen tekijän avulla ja supistetaan.

a) $\dfrac{8x+24}{16-4x}$

$= \dfrac{8x+8\cdot 3}{4\cdot 4-4x}$

$= \dfrac{\overset{2}{\cancel{8}}(x+3)}{\underset{1}{\cancel{4}}(4-x)}$

$= \dfrac{2(x+3)}{4-x}$

$= \dfrac{2x+6}{4-x}$

Vain tulon tekijöitä voi supistaa.

Kun tulon tekijöitä ei voi enää supistaa, kerrotaan sulut auki.

b) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2-3}$

$= \dfrac{2x^2-2\cdot 1}{3x^2-3\cdot 1}$

$= \dfrac{2(\cancel{x^2}-1)}{3(\cancel{x^2}-1)}$

$= \dfrac{2\cdot 1}{3\cdot 1}$

$= \dfrac{2}{3}$

Myös lausekkeella voi supistaa, jos se on tulon tekijänä sekä osoittajassa että nimittäjässä.

**VASTAUS** a) $\dfrac{2x+6}{4-x}$ b) $\dfrac{2}{3}$

# Tehtäviä

**Murto-lausekkeet**

124. Sievennä potenssin laskusääntöjen avulla.

a) $\dfrac{x^2x^7}{x^8}$ b) $\dfrac{x^5x^6x}{x^{12}}$ c) $\dfrac{x^ax^{2a}}{x^3}$ d) $\dfrac{x^{5+n}x^{8+n}}{x^{2n}}$

125. Sievennä.

a) $\dfrac{12x^4+36x}{6x}$ b) $\dfrac{15a^4-5a^3+20a^2}{-5a^2}$

126. Laske.

a) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}$ b) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{3}$

127. Laske.

a) $\dfrac{2x+1}{2}-\dfrac{x-5}{4}$ b) $\dfrac{a+b}{4}-\dfrac{2a-3b}{5}$

128. Sievennä lauseke $\dfrac{5x+3y}{3}+\dfrac{x-6y}{2}$. [S2008, 1c]

E1 129. Sievennä.

a) $\dfrac{5}{a+1}+\dfrac{a-3}{a+1}$ b) $\dfrac{3-x}{x}-\dfrac{1}{2}$

130. Sievennä.

a) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{3(2-a)}{6}$ b) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

131. Sievennä lausekkeet. [K2006, 2]

a) $\dfrac{x^2}{3x}+\dfrac{2(1-x)}{6}$ b) $\dfrac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$ c) $\dfrac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$

132. Mikä on lausekkeen $\dfrac{a(a-1)}{x}+ax$ arvo, kun $x=a-1$? [K2007, 1c]

133. Laske lausekkeen $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ arvo, kun $xy=2$ ja $x+y=3$.

E2 134. Sievennä.

a) $\dfrac{20x}{3}\cdot\dfrac{9}{5x}$ b) $\dfrac{6x^3}{5}:\dfrac{3x}{20}$

135. Sievennä.

a) $\dfrac{x}{6}:\dfrac{x}{4}$ b) $\dfrac{a+b}{2}:\dfrac{a+b}{4}$

136. Sievennä.

a) $\frac{x+1}{4} : \frac{x+1}{2}$ b) $\frac{5x^2}{3} : \frac{10x}{9}$

**Yhteisen tekijän erottaminen**

137. Kirjoita lauseke tulomuodossa.

a) $2a + 4$ b) $12b - 6$ c) $3x - 6y$

E3

138. Kirjoita lauseke tulomuotoon yhteisen tekijän avulla.

a) $25x + 30$ b) $6xy - 7x$ c) $2x^2 + 3x$

139. Kirjoita lauseke tulomuodossa erottamalla termeistä kaikki yhteiset tekijät.

a) $20ab + 10a$ b) $3xy - 15xy^2$ c) $2a^2b + 8ab^2$

E4

140. Sievennä.

a) $\frac{5x+10}{5x-15}$ b) $\frac{4x+2}{10x+5}$

141. Sievennä.

b) $\frac{16-2x}{8-x}$ b) $\frac{6x-9}{3-2x}$

142. Sievennä lauseke $\frac{a+3}{a} : \frac{3a+9}{2a}$. [K2008, 2c]

**Sekalaisia tehtäviä**

143. Sievennä.

a) $\frac{6t+3}{3} + \frac{2t+1}{2}$ b) $\frac{3s-1}{3} - \frac{5s+1}{10}$

144. a) Sievennä lauseke $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$. [S2007, 1c]

b) Sievennä $\frac{(x+3)(x-3)}{x^2-9}$.

145. Sievennä.

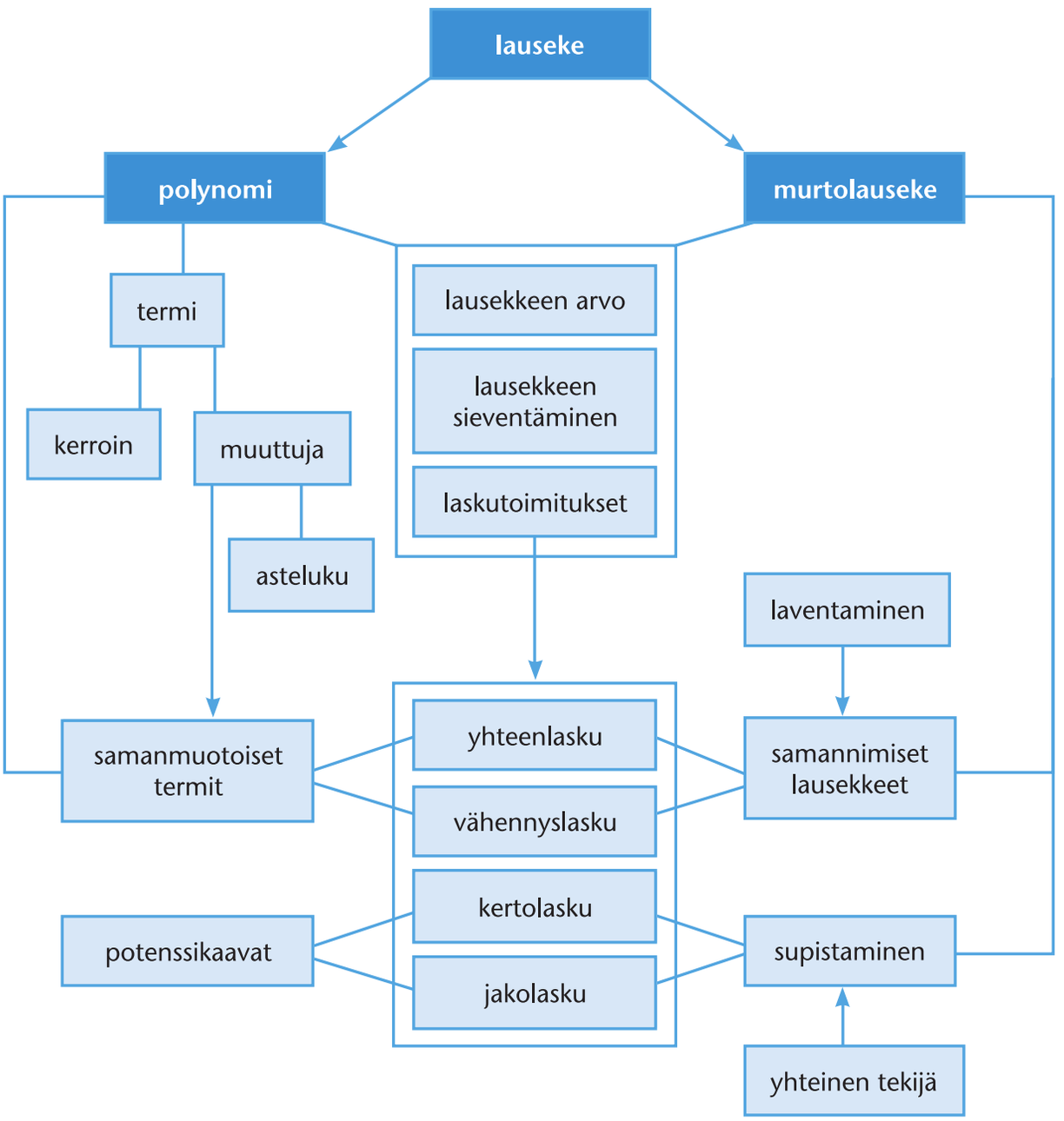
a) $\frac{3x-1}{4} \cdot \frac{8}{3x-1}$ b) $\frac{18x}{5} : \frac{9x}{10}$

146. Kirjoita lauseke tulomuodossa.

a) $36x + 27$ b) $5xy - 8x$ c) $x^2 - 4x$

147. Sievennä lauseke $\frac{4x+4y}{5} : \frac{3x+3y}{10}$.

# Keskeisiä käsitteitä



# 3 Yhtälöt

## 3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

**POHDINTA 1**

Tutki, millä tuntemattoman $x$ arvoilla seuraavien yhtälöiden oikea ja vasen puoli ovat yhtä suuret.

a) $2x - 1 = 7$
b) $x + 1 = x$
c) $3x = x$

**POHDINTA 2**

Yhtälön ratkaisu on luku, jolla yhtälön oikea ja vasen puoli ovat yhtä suuret.

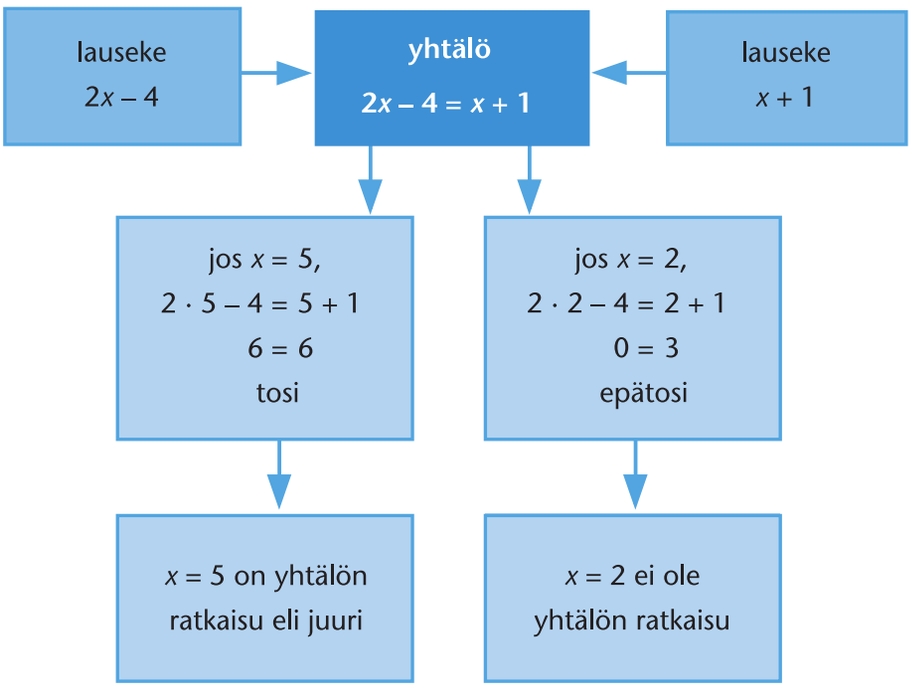
Tutki, onko luku 2 seuraavien yhtälöiden ratkaisu.

a) $4x - 1 = x + 2$
b) $x^2 + 5 = 3x + 3$
c) $10 - x^3 - x^2 = 0$

### Yhtälö ja yhtälön ratkaisu

Edellisessä luvussa käsittelimme polynomeja, jotka ovat tietyntyyppisiä lausekkeita. Yleisesti **lauseke** on merkitty luku tai laskutoimitus. Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, syntyy **yhtälö**.

Jos yhtälössä esiintyy tuntematon, niin sijoittamalla tuntemattoman paikalle lukuja saadaan yhtälöitä, jotka voivat olla joko tosia tai epätosia. Sellaista tuntemattoman arvoa, jolla yhtälö on tosi, sanotaan **yhtälön ratkaisuksi** eli **yhtälön juureksi**. Yhtälön ratkaisu siis toteuttaa yhtälön.




Ensimmäisen asteen yhtälö voidaan aina sieventää muotoon, jonka vasen puoli on ensimmäisen asteen polynomi ja oikea puoli on nolla.

**Ensimmäisen asteen yhtälö**

Yhtälöä, joka voidaan sieventää muotoon

$$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$$

sanotaan ensimmäisen asteen yhtälöksi.

Yhtälön **ratkaisemisella** tarkoitetaan sen kaikkien juurien määrittämistä. Yhtälöä ratkaistaessa yhtälö pyritään muokkaamaan sellaiseen muotoon, josta ratkaisu on välittömästi luettavissa.

Yhtälön ratkaiseminen aloitetaan poistamalla kaikki sulut ja yhdistämällä samanmuotoiset termit. Tämän jälkeen muuttujatermit pyritään saamaan yhtälön vasemmalle puolelle ja vakiotermit oikealle puolelle. Yhtälöä ratkaistaessa voidaan käyttää seuraavia keinoja:

- Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai yhtälön molemmilta puolilta voidaan vähentää sama luku tai lauseke.

- Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla tai lausekkeella. Tämä luku ei kuitenkaan saa olla nolla.

**ESIMERKKI 1** Ratkaise yhtälö.

a) $2(3x-1)=2x+3$ b) $2x^2-(5-2x)=x(2x-3)$

**RATKAISU**

a)

**Tapa 1**

Yhtälön molemmille puolille lisätään termejä.

$$\begin{aligned} 2(3x-1) &= 2x+3 \\ 6x-2 &= 2x+3 \quad \big| -2x \\ 6x-2x-2 &= 2x-2x+3 \\ 4x-2 &= 3 \quad \big| +2 \\ 4x-2+2 &= 3+2 \\ 4x &= 5 \quad \big| :4 \\ x &= \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

**Tapa 2**

Termejä siirretään yhtälössä puolelta toiselle.

$$\begin{aligned} 2(3x-1) &= 2x+3 \\ 6x-2 &= 2x+3 \\ 6x-2x-2 &= 3 \\ 4x-2 &= 3 \\ 4x &= 3+2 \\ 4x &= 5 \quad \big| :4 \\ x &= 1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Termin etumerkki vaihtuu.

Termien lisääminen yhtälön molemmille puolille on työlästä (tapa 1). Samaan lopputulokseen päädytään siirtämällä termi yhtäsuuruusmerkin toiselle puolelle ja vaihtamalla samalla termin etumerkki (tapa 2).

b) $2x^2-(5-2x)=x(2x-3)$

$$\begin{aligned} 2x^2-5+2x &= 2x^2-3x \\ 2x^2-2x^2+2x+3x &= 5 \\ 5x &= 5 \quad \big| :5 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

1. Poista sulut.
2. Yhdistä samanmuotoiset termit.
3. Siirrä muuttujatermit vasemmalle ja vakiotermit oikealle puolelle.
4. Jaa muuttujan kertoimella.

**VASTAUS** a) $x=1\frac{1}{4}$ b) $x=1$

## Identtiset yhtälöt

Kun yhtälöä sievennetään, tuntematon voi hävitä kokonaan. Jos sievennetty yhtälö on epätosi, mikään tuntemattoman arvo ei toteuta yhtälöä eli yhtälöllä ei ole ratkaisua. Jos taas sievennetty yhtälö on tosi, jokainen tuntemattoman arvo on yhtälön ratkaisu.

**Identtinen yhtälö**

Jos yhtälö on tosi tai epätosi riippumatta tuntemattoman arvosta, niin sitä sanotaan identtiseksi yhtälöksi.

ESIMERKKI 2

Ratkaise yhtälö.

a) $2x-(x-5)=2-(-x-3)$ b) $5(2x-1)=6x-(3-4x)$

RATKAISU

a)
$$\begin{aligned} 2x-(x-5) &= 2-(-x-3) \\ 2x-x+5 &= 2+x+3 \\ x+5 &= 5+x \\ x-x &= 5-5 \\ 0x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Saatu yhtälö pätee millä tahansa tuntemattoman $x$ arvolla, joten yhtälö on identtisesti tosi. Yhtälön ratkaisuja ovat siis kaikki luvut.

b)
$$\begin{aligned} 5(2x-1) &= 6x-(3-4x) \\ 10x-5 &= 6x-3+4x \\ 10x-5 &= 10x-3 \\ 10x-10x &= -3+5 \\ 0x &= 2 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

Saatu yhtälö ei päde millään tuntemattoman $x$ arvolla, joten yhtälö on identtisesti epätosi. Yhtälöllä ei ole ainuttakaan ratkaisua.

VASTAUS

a) Yhtälön ratkaisuja ovat kaikki reaaliluvut.
b) Yhtälöllä ei ole ratkaisua.

**ESIMERKKI 3**

Maikki lomailee Espanjan aurinkorannikolla. Lomallaan hän aikoo vuokrata skootterin. Hotellikirjasta Maikki löytää kahden vuokraamon ilmoitukset.

Kuinka monta kilometriä Maikin on ajettava, jotta hänen kannattaa vuokrata skootteri Manuel's-vuokraamosta?

**RATKAISU**

Merkitään Maikin ajamaa kilometrimäärää kirjaimella $x$.

Skootterin vuokraa Manuel's-vuokraamossa kuvaa lauseke $75 + 0{,}25x$.

Skootterin vuokraa Los bicycles -vuokraamossa kuvaa lauseke $0{,}60x$.

Polynomifunktio s.146

Ratkaistaan ensin, millä kilometrimäärällä vuokraamojen hinnat ovat yhtä suuret.

$$\begin{aligned} 75 + 0{,}25x &= 0{,}60x \\ 0{,}25x - 0{,}60x &= -75 \\ -0{,}35x &= -75 \qquad \mid : (-0{,}35) \\ x &= 214{,}28\ldots \quad \text{(km)} \end{aligned}$$

Koska Los bicycles -vuokraamossa ei ole kiinteää maksua, se on edullisempi kun ajetaan alle 214 km. Manuel's-vuokraamo puolestaan on edullisempi, kun ajetaan yli 214 km.

**VASTAUS**

Maikin on ajettava yli 214 kilometriä.

## Nimittäjän poistaminen

Jos yhtälössä on murtolukuja, yhtälöä kannattaa muokata niin, että kaikilla termeillä on kokonaislukukertoimet.

1. Kirjoitetaan kaikki termit nimittäjien kanssa. Jos termillä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi voidaan merkitä luku 1.
2. Lavennetaan samannimisiksi.
3. Kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.
4. Sievennetään yhtälöä termejä siirtämällä ja yhdistämällä.
5. Ratkaistaan $x$ jakamalla yhtälön molemmat puolet $x$:n kertoimella.

### ESIMERKKI 4

Ratkaise yhtälö $2x - \frac{2}{3} = \frac{x}{2} - 4$.

### RATKAISU

Kirjoitetaan termeille $2x$ ja $-4$ nimittäjäksi luku 1 ja lavennetaan kaikki termit samannimisiksi.

$$\overset{6)}{\frac{2x}{1}} - \overset{2)}{\frac{2}{3}} = \overset{3)}{\frac{x}{2}} - \overset{6)}{\frac{4}{1}}$$

$$\frac{12x}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3x}{6} - \frac{24}{6}$$

Kerrotaan jokunen termi yhteisellä nimittäjällä ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{12x}{6} - \frac{4}{6} = \frac{3x}{6} - \frac{24}{6} \qquad \big| \cdot 6$$

$$6 \cdot \frac{12x}{6} - 6 \cdot \frac{4}{6} = 6 \cdot \frac{3x}{6} - 6 \cdot \frac{24}{6}$$

$$12x - 4 = 3x - 24$$

$$9x = -20 \qquad \big| : 9$$

$$x = -\frac{20}{9} = -2\frac{2}{9}$$

### VASTAUS

$x = -2\frac{2}{9}$

Jos osoittajassa on lauseke, joka sisältää vähintään kaksi termiä, nimittäjien poistamisessa on oltava erityisen huolellinen. Tällöin vähennyslasku muuttaa lausekkeen kaikkien termien etumerkit. Virheiden välttämiseksi kannattaa lisätä sulut osoittajan ympärille, kun nimittäjiä kerrotaan pois.

ESIMERKKI 5 Ratkaise yhtälö $\frac{x-1}{4}-\frac{3x-1}{2}=\frac{x}{2}$.

RATKAISU Lavennetaan ensin kaikki termit samannimisiksi.

$$\frac{x-1}{4}-\frac{3x-1}{2}\overset{2)}{=}\frac{x}{2}$$
$$\frac{x-1}{4}-\frac{2(3x-1)}{4}=\frac{2x}{4}$$
$$\frac{x-1}{4}-\frac{6x-2}{4}=\frac{2x}{4}$$

**Tapa 1**
Kerrotaan heti nimittäjät pois.

$$\frac{x-1}{4}-\frac{6x-2}{4}=\frac{2x}{4} \quad \Big| \cdot 4$$
$$x-1-(6x-2)=2x$$
$$x-1-6x+2=2x$$
$$-7x=-1 \quad \Big| : (-7)$$
$$x=\frac{1}{7}$$

**Tapa 2**
Suoritetaan ensin vähennyslasku.

$$\frac{x-1-(6x-2)}{4}=\frac{2x}{4}$$
$$\frac{x-1-6x+2}{4}=\frac{2x}{4} \quad \Big| \cdot 4$$
$$x-1-6x+2=2x$$
$$-7x=-1 \quad \Big| : (-7)$$
$$x=\frac{1}{7}$$

VASTAUS $x=\frac{1}{7}$

# Tehtäviä

**Yhtälö ja yhtälön ratkaisu**

Ratkaise tehtävien 148–153 yhtälöt.

148. a) $5x - 3 = -2x + 11$ b) $x - (4 - 3x) = 6x - (x - 2)$

E1 149. a) $3(4 - 2x) = 6 - 8x$ b) $5x(x - 1) = 5x^2 - (8 - 3x)$

150. a) $2(a + 3) - 3(-3a - 4) = 4 - (7a + 2)$
b) $-5c - (1 - c) + 2(4c - 1) = c - (5c - 2)$

151. a) $(3x - 1)(2x - 3) = -3x(4 - 2x)$
b) $(x - 2)^2 - 4x = x^2 - 4$

E2 152. a) $(3 + x) - (x - 3) = 0$ b) $4(x - 1) + 1 = x - 3(1 - x)$

153. a) $5(x + 3) - (4 - 2x) = 4x - 3(3 - x)$
b) $6x - (x + 1) = 4 - 3(x - 2)$

154. Yhtälön ratkaisu on luku, joka toteuttaa yhtälön. Yhtälön $2ax + 5a - 2 = 20$ ratkaisuna on $x = 3$. Mikä on tällöin vakion $a$ arvo?

155. Millä vakion $k$ arvolla yhtälön $5(x - k) = 2x - 3$ ratkaisuna on $x = -2$?

E3 156. Kopiokoneen kuukausivuokra on 280 €. Lisäksi yritys maksaa jokaisesta otetusta valokopiosta 5 senttiä.
a) Kuukauden kokonaislasku oli 560 €. Kuinka monta kopiota otettiin?
b) Yksittäisen kopion hinta muuttui. Yritys otti 2300 kopiota, jolloin kuukauden lasku oli 441 €. Kuinka monta senttiä kopion hintaa nostettiin?

157. Kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun summa on 96. Mitkä ovat nämä luvut?

158. Petra on tällä hetkellä 4 kertaa niin vanha kuin hänen pikkusiskonsa Lilli. 12 vuoden kuluttua Petra on 2 kertaa niin vanha kuin hänen sisarensa. Mitkä ovat tyttöjen iät tällä hetkellä?

159. Pyöräilijät ovat 700 metrin etäisyydellä toisistaan ja ajavat tasaisella nopeudella. Puolen tunnin päästä nopeampi saavuttaa hitaamman. Mikä on ajajien nopeusero? [S1990, 3b]

160. Jos positiivisen kokonaisluvun loppuun merkitään 9, saadaan alkuperäinen luku 13-kertaisena. Määritä alkuperäinen luku.

**Nimittäjien poistaminen**

Ratkaise tehtävien 161–163 yhtälöt.

E4 161. a) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$ b) $2x-\frac{x}{4}=\frac{1}{3}$

162. a) $-3x-1=\frac{2x}{3}$ b) $\frac{x-1}{2}+2x=\frac{1}{3}$

E5 163. a) $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x+7}{3}=\frac{5x+1}{6}$ b) $\frac{2x-5}{4}-\frac{3x-8}{6}=\frac{x}{12}$

164. a) $\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x=1\frac{5}{6}$ b) $-x-\frac{2x-1}{6}=-3(x+1)$

165. Kiiran käteen jäävästä palkasta kolmasosa menee asumiseen, kaksi viidesosaa ruokaan, kahdeksasosa vaatteisiin ja loput 150 euroa laskuihin ja muihin kuluihin. Kuinka paljon Kiira saa kuukausipalkkaa puhtaana käteen?

166. Tilausmatkan kustannukset ajateltiin jaettavaksi tasan 22 osanottajalle, mutta kun lähtijöitä olikin 24, tuli kullekin matka 10 euroa halvemmaksi. Kuinka paljon kukin osanottaja joutui lopulta maksamaan? [K1993, 1]

167. Määritä $a$ siten, että yhtälöllä $\frac{2x^2}{3}-\frac{1}{2}x+4a=0$ on ratkaisu $x=3$.

168. Millä $p$:n arvolla lauseke $p+\frac{p}{2}+\frac{p}{4}$ saa arvon 2?

**Sekalaisia tehtäviä**

169. Ratkaise yhtälö.

a) $3(2x-1)-(-2x+7)=5x-4$

b) $3x(x+3)=x^2-(6-2x^2)$

170. Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{2x-3}{3}+4=\frac{-x+2}{5}$ b) $\frac{8-3x}{6}=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$

171. Suorakulmion kanta on 3 cm suurempi kuin korkeus. Määritä suorakulmion mitat, kun suorakulmion piiri on 30 cm.

172. Erään luokan opiskelijoista $\frac{3}{4}$ päätti osallistua vanhojen tansseihin. Tanssiaisiltana kolme oli kuitenkin sairaana, jolloin tanssijoita oli 10 vähemmän kuin kyseisellä luokalla on opiskelijoita. Muodosta tilannetta kuvaava yhtälö ja ratkaise luokan oppilasmäärä.

173. Murtolukuja ei pidä laskea yhteen seuraavasti: $\frac{3}{2}+\frac{a}{4}=\frac{3+a}{2+4}$.

Millä $a$:n arvolla kuitenkin saadaan oikea tulos? [S1993, 2a]

# 3.2 Vaillinainen toisen asteen yhtälö

**POHDINTA 1**

a) Laske päässä seuraavat kertolaskut.

$1 \cdot 2 \cdot 0 =$ $\quad$ $38 \cdot 15 \cdot 0 \cdot 256 \cdot 14 =$

$3 \cdot 50 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 2 =$ $\quad$ $a \cdot b \cdot 0 =$

b) Tutki, milloin seuraavat yhtälöt toteutuvat.

$3x = 0$ $\quad$ $x - 3 = 0$

$3 \cdot 10^{-27} \cdot x\pi = 0$ $\quad$ $x(x+2) = 0$

$x + 2 = 0$ $\quad$ $(x+2)(x-3) = 0$

**POHDINTA 2**

Määritä luvut, joiden neliö on

a) 16 $\quad$ b) 10 $\quad$ c) $-25$ $\quad$ d) $s$.

Yhtälöt $x^2 + 2x - 1 = 0$, $2x^2 + 4x = 0$ ja $x^2 - 8 = 0$ ovat toisen asteen yhtälöitä.

**Toisen asteen yhtälö**

Yhtälöä sanotaan toisen asteen yhtälöksi, jos se voidaan sieventää muotoon

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Jos toisen asteen yhtälöstä puuttuu ensimmäisen asteen termi $bx$, vakiotermi $c$ tai molemmat, sitä kutsutaan **vaillinaiseksi toisen asteen yhtälöksi**.

Jos toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ sisältää kaikki termit, sitä kutsutaan **täydelliseksi toisen asteen yhtälöksi**.

| Yhtälö | Yleinen muoto | Esimerkki |
|---|---|---|
| täydellinen toisen asteen yhtälö | $ax^2 + bx + c = 0$ | $x^2 + 2x - 1 = 0$ |
| vaillinainen toisen asteen yhtälö | $ax^2 + bx = 0$<br>**Huomaa:** Yhtälöstä puuttuu vakiotermi $c$. | $2x^2 + 4x = 0$ |
| | $ax^2 + c = 0$<br>**Huomaa:** Yhtälöstä puuttuu ensimmäisen asteen termi $bx$. | $x^2 - 9 = 0$ |

Kaikilla toisen asteen yhtälöillä on oma ratkaisutapansa.

**Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx = 0$**

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt, joista puuttuu vakiotermi, ovat muotoa $ax^2 + bx = 0$. Nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa tulomuotoon ottamalla tuntematon $x$ yhteiseksi tekijäksi.

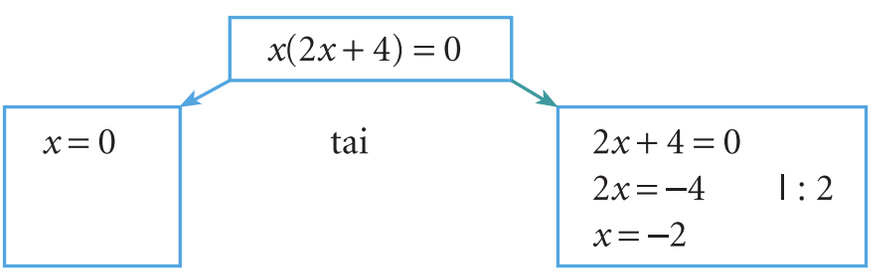
Esimerkiksi $2x^2 + 4x = 0$ on vaillinainen toisen asteen yhtälö, jossa voidaan ottaa $x$ yhteiseksi tekijäksi.

$$2x^2 + 4x = 0$$
$$2x \cdot x + 4x = 0$$
$$x \cdot (2x + 4) = 0$$

Toinen tulon tekijä saadaan jakamalla alkuperäinen polynomi $x$:llä

$$\frac{2x^2 + 4x}{x} = 2x + 4.$$

Yhtälö saadaan nyt ratkaistua **tulon nollasäännön** avulla. Tulo on nolla, kun jokin tulon tekijöistä on nolla.




**Tulon nollasääntö**

Tulo on nolla täsmälleen silloin, kun jokin tulon tekijöistä on nolla.

$ab = 0$ täsmälleen silloin, kun
$a = 0$ tai $b = 0$

**ESIMERKKI 1** Ratkaise yhtälö.

a) $(x-1)(x+3)=0$ b) $2x^2-x=0$ c) $3x=6x^2$

**RATKAISU**

a) $(x-1)(x+3)=0$

Tulon nollasäännön mukaan $x-1=0$ tai $x+3=0$.

$x-1=0$ tai $x+3=0$

$x=1$ $x=-3$

b) $2x^2-x=0$ $2xx-x=0$

$x(2x-1)=0$

Tulon nollasäännön mukaan

$x=0$ tai $2x-1=0$

$2x=1$ $\vert:2$

$x=\frac{1}{2}$

c) $3x=6x^2$ Siirrä kaikki termit ensin samalle puolelle.

$3x-6x^2=0$

$3x(1-2x)=0$

Tulon nollasäännön mukaan

$3x=0$ $\vert:3$ tai $1-2x=0$

$x=0$ $-2x=-1$ $\vert:(-2)$

$x=\frac{1}{2}$

**VASTAUS** a) $x=-3$ tai $x=1$ b) $x=0$ tai $x=\frac{1}{2}$ c) $x=0$ tai $x=\frac{1}{2}$

## Toisen asteen yhtälö $x^2 + c = 0$

Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt, joista puuttuu ensimmäisen asteen termi, ratkaistaan käyttämällä neliöjuurta.

Esimerkiksi yhtälö $x^2 - 9 = 0$ on vaillinainen toisen asteen yhtälö, ja se voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^2 = 9$$

Tämän yhtälön toteuttaa kaksi lukua: $\sqrt{9} = 3$ ja $-\sqrt{9} = -3$. Yhtälön ratkaisu on siis

$$x = \pm 3$$

### Esimerkki 2

Ratkaise yhtälö.

a) $x^2 = 5$ b) $4x^2 - 32 = 2x^2$ c) $3x^2 + 25 = 2x^2$

### Ratkaisu

a) $x^2 = 5$

$x = \sqrt{5} = 2{,}236\ldots \approx 2{,}2$ tai $x = -\sqrt{5} = -2{,}236\ldots \approx -2{,}2$ m

Koska yhtälön ratkaisut ovat päättymättömiä desimaalilukuja, vastaukseksi annetaan tarkat arvot $x = \pm\sqrt{5}$ ja likiarvot.

b)
$$\begin{aligned} 4x^2 - 32 &= 2x^2 \\ 4x^2 - 2x^2 &= 32 \\ 2x^2 &= 32 \quad \vert : 2 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

1. Siirrä muuttujatermit vasemmalle ja vakiotermit oikealle puolelle.
2. Jaa yhtälön molemmat puolet toisen asteen termin kertoimella.
3. Ratkaise yhtälö neliöjuuren avulla.

c)
$$\begin{aligned} 3x^2 + 25 &= 2x^2 \\ 3x^2 - 2x^2 &= -25 \\ x^2 &= -25 \end{aligned}$$

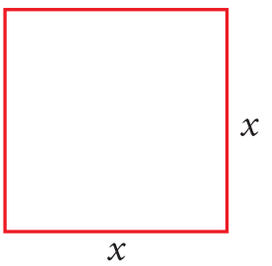
Minkään reaaliluvun neliö ei ole negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

### Vastaus

a) $x = \pm\sqrt{5} \approx \pm 2{,}2$ b) $x = \pm 4$ c) ei ratkaisua

**ESIMERKKI 3** Neliön muotoisen aitauksen pinta-ala on 121 $m^2$. Kuinka paljon piikkilankaa tarvitaan alueen aitaamiseen?

**RATKAISU** Merkitään aitauksen sivun pituutta kirjaimella $x$.
Tällöin aitauksen pinta-ala on $x^2$,
joten saadaan yhtälö




$$x^2 = 121$$
$$x = \pm\sqrt{121}$$
$$x = \pm 11$$

Koska sivun pituus ei voi olla negatiivinen, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 11$.

Piikkilankaa tarvitaan $4 \cdot 11$ m $= 44$ m.

**VASTAUS** Piikkilankaa tarvitaan 44 m.

# Tehtäviä

**Toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx = 0$**

Ratkaise tehtävien 174–180 yhtälöt.

174. a) $(x+1)(2x-1)=0$ b) $x(x-4)(3x+6)=0$

E1 175. a) $(3x-1)(4-x)=0$ b) $4x^2+2x=0$

176. a) $3x^2-x=0$ b) $4x^2-12x=0$ c) $x-2x^2=0$

177. a) $2x^2=x$ b) $6x=36x^2$ c) $-2x=4x^2$

178. a) $x^2+2x=3x^2-x$ b) $2x=x^2-x$

179. a) $(x+1)^2=0$ b) $x(2x-1)^2=0$

180. a) $3x^2-x=x^2+x$ b) $(x-1)^2(3x-1)^2=0$

181. Muodosta yhtälö, jonka ratkaisut ovat
a) 2 ja 6 b) $-3$ ja $-1$ c) $a$ ja $b$.

182. Millä muuttujan $x$ arvoilla polynomit $P(x)$ ja $Q(x)$ saavat saman arvon, kun
a) $P(x)=x^2+2x$ ja $Q(x)=x^2$
b) $P(x)=3x^2-2x$ ja $Q(x)=x^2-x$?

183. Ratkaise yhtälö $(x+7-\sqrt{3})(x+7+\sqrt{3})=0$. [S1991, 2]

184. Vesa potkaisee pallon 50 metrin päässä seisovalle Veeralle. Kun potkaisusta on kulunut $t$ sekuntia, pallon korkeus maan pinnasta on $4t-t^2$.
a) Kuinka korkealla pallo on 2 sekunnin kuluttua potkaisusta?
b) Veera ei saanut palloa kiinni. Kuinka pitkän ajan kuluttua pallo osui maahan?

185. Muodosta toisen asteen yhtälö, jolla
a) on yksi ratkaisu $x=2$ b) ei ole ratkaisua.

186. Millä vakion $p$ arvolla yhtälön $x(x+p)=3x$ yhtenä juurena on luku $-3$, ja mitkä ovat tällöin yhtälön juuret? [K1995, 2a]

**Toisen asteen yhtälö $ax^2 + c = 0$**

Ratkaise tehtävien 187–192 yhtälöt.

187. a) $x^2 = 81$ b) $x^2 = 3$ c) $x^2 = -4$

188. a) $x^2 - 1 = 0$ b) $2x^2 - 32 = 0$ c) $3x^2 + 9 = 0$

189. a) $\frac{1}{2}x^2 - 2 = 0$ b) $3(x^2 - 1) = 0$ c) $3(x^2 - 1) = 3$

E2 190. a) $x^2 = 7$ b) $6x^2 - 20 = 3x^2 + 7$ c) $4 - 2x^2 = 12$

191. a) $0{,}01s^2 = 1$ b) $0{,}03k^2 - 0{,}6 = 0$

192. a) $2(t^2 + 1) = 3t^2 + 4$ b) $x^2 + 5 = 4x^2 + 32$

193. Millä muuttujan $t$ arvolla lauseke $t^2 + 3$ saa arvon

a) 3 b) 12 c) 1?

E3 194. Leikkikentälle rajataan narulla 3,0 m$^2$:n suuruinen alue. Kuinka paljon narua tarvitaan, kun alue on muodoltaan neliö?

195. Mökkinaapurit Turo ja Petteri päättivät rakentaa uudet laiturit. Turo rakensi 5 m pitkän ja 1,5 m leveän laiturin. Laske Petterin laiturin mitat, kun laituri on pinta-alaltaan samankokoinen kuin Turon laituri, mutta muodoltaan neliö.

196. Mökin neliön muotoisen kuistin lattian rakentamiseen käytettiin 200 metriä lautaa, jonka leveys on 15 cm. Laske kuistin lattian mitat.

197. Millä muuttujan $v$ arvoilla lauseke $v^2 + 2x$ saa arvon 0, kun

a) $x = -1$ b) $x = 1$ c) $x = 0$?

198. Ympyrän muotoisen pöydän halkaisija on 1,5 metriä. Laske samankokoisen neliön muotoisen pöydän mitat. (Ympyrän ala $A = \pi r^2$)

199. Neliön sivun pituus on 2,0 m. Kahden keskenään samankokoisen ympyrän yhteenlaskettu pinta-ala on yhtä suuri kuin neliön pinta-ala. Laske ympyrän säde. (Ympyrän ala $A = \pi r^2$)

## Sekalaisia tehtäviä

Ratkaise tehtävien 200–202 yhtälöt.

200. a) $x^2 = 49$ b) $5x^2 - 125 = 0$ c) $4x^2 - 20 = 0$

201. a) $(x-1)(3x+2) = 0$ b) $8x^2 - 3x = 2x^2 + x$

202. a) $2x(x+1) = 3x$ b) $x = \frac{1}{2}x(x+1)$
c) $2(x^2 - 2x) = 4x(x-1)$

203. Muodosta toisen asteen yhtälö, jolla
a) on kaksi ratkaisua, $x = -3$ ja $x = 2$
b) on yksi ratkaisu $x = 5$
c) ei ole ratkaisua.

204. Venla aikoo ommella neliön muotoisen pöytäliinan kankaasta, jonka mitat ovat 75 cm × 150 cm. Laske pöytäliinan mitat, kun Venla käyttää pöytäliinaan koko kankaan.

# 3.3 Täydellinen toisen asteen yhtälö

Korkeamman asteen yhtälö s.152

Täydellinen toisen asteen yhtälö sisältää kaikkien kolmen eri asteluvun termit: toisen asteen termin, ensimmäisen asteen termin ja vakiotermin. Täydellisen toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut saadaan ratkaisukaavan avulla.

**Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava**

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ratkaisukaavan luvut $a$, $b$ ja $c$ ovat yhtälön termien kertoimet:

- $a$ on toisen asteen termin kerroin
- $b$ on ensimmäisen asteen termin kerroin
- $c$ on vakio.

ESIMERKKI 1 Ratkaise yhtälö $-x^2 + 2x + 3 = 0$.

RATKAISU Tässä yhtälössä $a = -1$, $b = 2$ ja $c = 3$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

Laske ensin juurrettavan arvo.

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-2 - 4}{-2} = 3$$

VASTAUS $x = -1$ tai $x = 3$

**ESIMERKKI 2** Ratkaise yhtälö $3x^2 - x = 0$.

**RATKAISU**

**Tapa 1**

Ratkaistaan yhtälö ratkaisukaavalla.

Tässä yhtälössä $a = 3$, $b = -1$ ja $c = 0$.

Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 0}}{2 \cdot 3}$$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm 1}{6}$$

$$x = \frac{1+1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-1}{6} = 0$$

**Tapa 2**

Yksinkertaisempi tapa ratkaista yhtälö on käyttää tulon nollasääntöä.

Otetaan tuntematon $x$ yhteiseksi tekijäksi.

$$3x^2 - x = 0$$
$$x(3x - 1) = 0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad 3x - 1 = 0$$
$$3x = 1 \quad |:3$$
$$x = \frac{1}{3}$$

**VASTAUS** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$

**ESIMERKKI 3** Ratkaise yhtälö $x^2 - 6x + 1 = 0$.

**RATKAISU** Tässä yhtälössä $a = 1$, $b = -6$ ja $c = 1$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} = 5{,}828\ldots \quad \text{tai} \quad x = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} = 0{,}171\ldots$$

**VASTAUS** $x = \frac{6 + \sqrt{32}}{2} \approx 5{,}8$ tai $x = \frac{6 - \sqrt{32}}{2} \approx 0{,}2$

Ilmoita vastauksen tarkka arvo (lauseke) ja likiarvo.

**ESIMERKKI 4** Ratkaise yhtälö $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} = 0$.

**RATKAISU** Sievennetään ensin yhtälöä poistamalla nimittäjät.

$$\begin{aligned} &{}^{3)}\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x + {}^{2)}\tfrac{1}{3} = 0 \\ &\tfrac{3}{6}x^2 - \tfrac{1}{6}x + \tfrac{2}{6} = 0 \qquad \big| \cdot 6 \\ &3x^2 - x + 2 = 0 \end{aligned}$$

Tässä yhtälössä $a = 3$, $b = -1$ ja $c = 2$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{6}$$

Koska $-23 < 0$ eli juurrettava on negatiivinen, yhtälöllä ei ole reaalisia ratkaisuja.

**VASTAUS** ei ratkaisua

# Tehtäviä

Ratkaise tehtävien 205–215 yhtälöt.

205. a) $x^2 + 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

E1 206. a) $x^2 + x - 2 = 0$ b) $2x^2 + 4x - 30 = 0$

207. a) $-3x^2 + 15x + 18 = 0$ b) $4x^2 - 12x - 40 = 0$

208. a) $-2x^2 + 24 = 2x$ b) $3x^2 + 18x = -15$

E2 209. a) $7x^2 - x = 0$ b) $3x^2 = 6x$

210. a) $-x^2 + 6x - 9 = 0$ b) $2y + y^2 + 1 = 0$

E3 211. a) $x^2 + 5x + 1 = 0$ b) $-2x + x^2 - 2 = 0$

212. a) $2x^2 + 7x = -4$ b) $x(5 + 3x) = -1$

E4 213. a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 = 0$ b) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0$

214. a) $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$ b) $-\frac{5}{6}t + t^2 + \frac{1}{6} = 0$

215. a) $k^2 - k + \frac{1}{4} = 0$ b) $(x + 1)^2 = 9$

216. Millä muuttujan $x$ arvoilla polynomien $P(x) = 7x^2 - 3x - 12$ ja $Q(x) = 5x^2 - 5x + 28$ arvot ovat yhtä suuret?

217. Määritä vakio $p$ siten, että toisen asteen yhtälön $4px^2 - 2x - 40 = 0$ toisena juurena on $x = -4$. Mikä on toinen juuri?

218. Ratkaise yhtälö.

a) $1000x^2 + 2000x + 1000 = 0$
b) $0{,}0001x^2 + 0{,}0001x - 0{,}0002 = 0$

219. Ratkaise yhtälö $4\sqrt{3}x = 1 - 4x^2$. [K1991, 2]

220. Määritä vakio $r$ siten, että toisen asteen yhtälöllä $6rt^2 - r^2t - 1 = 0$ on toisena juurena $t = \frac{1}{2}$. Mikä on toinen juuri?

221. Määritä yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ ne ratkaisut, jotka kuuluvat avoimeen väliin $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$. [K1998, 1] (Ohje: Avoin väli $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$ tarkoittaa lukuja, jotka toteuttavat epäyhtälön $-1 < x < \frac{2}{3}$.)

## Sekalaisia tehtäviä

Ratkaise tehtävien 222–225 yhtälöt

222. a) $x^2 - 4x + 3 = 0$ b) $2x^2 - 9x - 5 = 0$

223. a) $s^2 + 8s + 16 = 0$ b) $-2x^2 + 8x - 40 = 0$

224. a) $x^2 + x = 56$ b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

225. a) $5x^2 - 9x + 3 = 0$ b) $x^2 + 3x = 1$

226. Määritä vakio $t$ siten, että yhtälöllä $4tx^2 - 10t^2x - 24 = 0$ on yhtenä ratkaisuna $x = 3$.

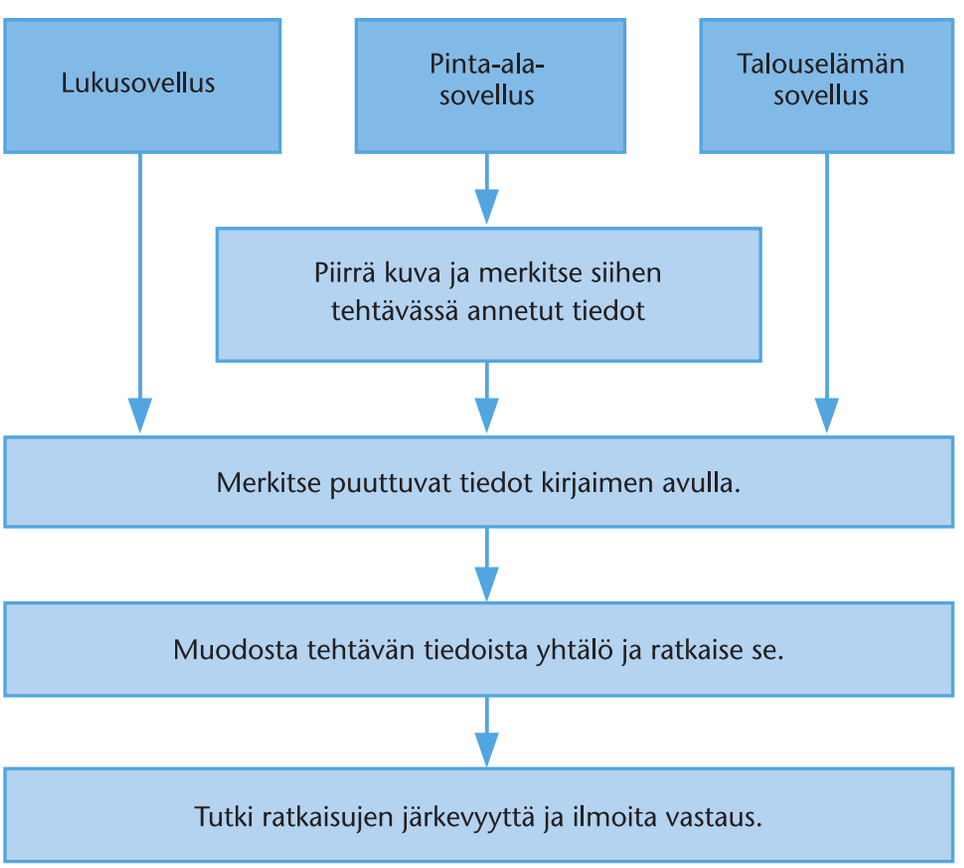
# 3.4 Toisen asteen yhtälön sovelluksia

Sovellustehtävän tilanne tulee hahmottaa huolellisesti, koska koko ratkaisu perustuu oikean yhtälön löytämiseen.

Hahmottamisessa kannattaa käyttää apuna piirroksia, taulukoita ja apukysymyksiä. Tällaisia apukysymyksiä ovat mm. seuraavat:

- Mitä tietoja tehtävässä on annettu?
- Mitä tehtävässä kysytään?
- Voiko ongelman ilmaista toisin sanoin?
- Mitkä asiat vaikuttavat toisiinsa?
- Voidaanko sama asia kirjoittaa kahden eri lausekkeen avulla?

Sovellustehtävän ratkaisussa kannattaa edetä seuraavasti:



**ESIMERKKI 1** Kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo on 132. Määritä luvut.

**RATKAISU** Olkoot kaksi peräkkäistä kokonaislukua $x$ ja $x+1$.

Koska lukujen tulo on 132, saadaan yhtälö $x(x+1)=132$.

Ratkaistaan tästä yhtälöstä $x$.

$$x(x+1)=132$$
$$x^2+x-132=0$$

Avataan sulut ja siirretään 132 yhtälön toiselle puolelle.

Tässä toisen asteen yhtälössä $a=1$, $b=1$ ja $c=-132$. Sijoitetaan luvut ratkaisukaavaan.

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-132)}}{2\cdot 1}$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{529}}{2}$$
$$x=\frac{-1\pm 23}{2}$$

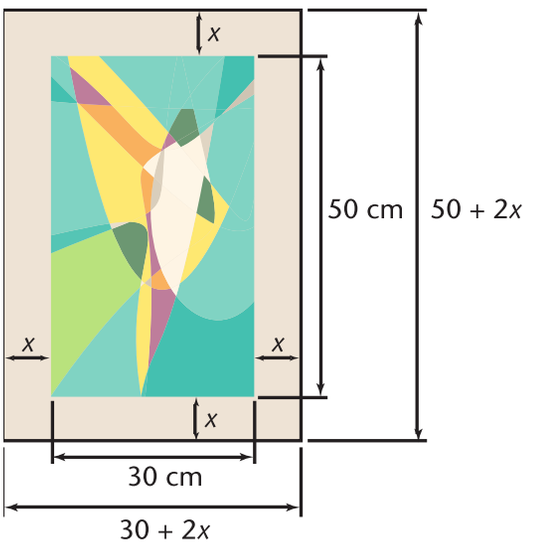
$$x=\frac{-1+23}{2}=11 \quad \text{tai} \quad x=\frac{-1-23}{2}=-12$$

- Kun $x=11$, niin $x+1=11+1=12$.
- Kun $x=-12$, niin $x+1=-12+1=-11$.

**VASTAUS** Luvut ovat 11 ja 12 tai $-11$ ja $-12$.

**ESIMERKKI 2**

Taulu on kehystetty tasalevyisellä kehyksellä. Kehyksen pinta-ala on 500 cm$^2$. Kuinka leveä kehys on, kun taulun mitat ovat 30 cm × 50 cm?




**RATKAISU**

Merkitään kehyksen leveyttä kirjaimella $x$. Leveys on positiivinen luku eli $x \geq 0$.

Tällöin kehystetyn taulun leveys on $30 + 2x$ ja korkeus $50 + 2x$, joten sen pinta-ala $A = (30 + 2x)(50 + 2x)$.

Kun kehystetyn taulun pinta-alasta vähennetään taulun pinta-ala, jäljelle jää pelkän kehyksen pinta-ala.

Koska kehyksen pinta-ala on 500 cm$^2$, saadaan yhtälö

$$(30 + 2x)(50 + 2x) - 30 \cdot 50 = 500.$$

Ratkaistaan tästä $x$.

$$(30 + 2x)(50 + 2x) - 30 \cdot 50 = 500$$
$$1500 + 60x + 100x + 4x^2 - 1500 = 500$$
$$4x^2 + 160x - 500 = 0 \quad | : 4$$
$$x^2 + 40x - 125 = 0$$

Jaetaan yhtälön molemmat puolet luvulla 4, jotta saadaan ratkaisukaavaan pienemmät luvut.

$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-125)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-40 \pm \sqrt{2100}}{2}$$
$$x = \frac{-40 + \sqrt{2100}}{2} = 2{,}912\ldots \approx 3 \quad \text{tai}$$
$$x = \frac{-40 - \sqrt{2100}}{2} = -42{,}912\ldots$$

Vastauksen tarkkuus s.153

Negatiivinen ratkaisu ei käy, koska $x \geq 0$.

**VASTAUS**

Kehyksen leveys on 3 cm.

**ESIMERKKI 3**

Jos jäätelön hinta on $x$ €, sitä myydään hellepäivänä $443 - 42x$ kappaletta. Mikä on jäätelön hinnan oltava, jotta myyntitulo olisi 570 €? Jäätelön enimmäishinta on 3 €.

**RATKAISU**

Koska jäätelön enimmäishinta on 3 € ja hinnan on oltava positiivinen, niin $0 \le x \le 3$.

Koska myyntitulo on hinnan ja myyntimäärän tulo, niin myyntituloa kuvaava lauseke on $x(442 - 42x)$.

myyntitulo = hinta · määrä

Kun myyntitulo on 570 euroa, saadaan yhtälö $570 = x(443 - 42x)$.

Ratkaistaan yhtälöstä $x$.

1. Kerro sulut auki.
2. Siirrä kaikki termit vasemmalle puolelle.
3. Ratkaise ratkaisukaavalla.

$$570 = x(443 - 42x)$$

$$570 = 443x - 42x^2$$

$$42x^2 - 443x + 570 = 0$$

$$x = \frac{-443 \pm \sqrt{(-443)^2 - 4 \cdot 42 \cdot 570}}{2 \cdot 42}$$

$$x = \frac{443 \pm \sqrt{100489}}{84}$$

$$x = \frac{443 \pm 317}{84}$$

$$x = \frac{443 + 317}{84} = 9{,}047\ldots \quad \text{tai}$$

$$x = \frac{443 - 317}{84} = 1{,}50$$

Vastauksen tarkkuus s.153

Koska vaadittiin, että $0 \le x \le 3$ ratkaisuista kelpaa vain $x = 1{,}50$.

**VASTAUS**

Jäätelön myyntihinnan on oltava 1,50 €.

# Tehtäviä

**Luku-sovellukset** E1

227. Minkä kahden peräkkäisen kokonaisluvun summa on 251?

228. Kahden luvun summa on 21 ja lukujen neliöiden summa 333. Mitkä luvut ovat kyseessä?

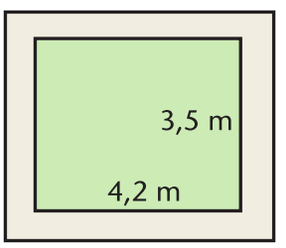
229. Neljässä peräkkäisessä positiivisessa kokonaisluvussa on kaksi parillista ja kaksi paritonta lukua. Parillisten lukujen tulo on kaksi kertaa niin suuri kuin parittomien lukujen summa. Mitkä ovat nämä neljä peräkkäistä kokonaislukua?

**Pinta-alasovellukset**

230. Suorakulmion muotoisen kentän aitaamiseen on käytössä 96 metriä aitaa. Kentän pinta-ala on 540 $m^2$. Laske kentän sivujen pituudet.

E2

231. Kasvimaan mitat ovat 3,5 m × 4,2 m. Kasvimaan ympärillä kulkee polku, joka on yhtä leveä joka kohdasta. Laske polun leveys, kun polun ja kasvimaan yhteinen pinta-ala on 18,8 $m^2$.




232. Neliöstä muodostetaan suorakulmio lisäämällä leveyttä 2,0 cm ja korkeutta 3,0 cm. Näin saadun suorakulmion pinta-ala on 3 kertaa niin suuri kuin alkuperäinen neliön pinta-ala. Laske neliön ala.

233. Kodinkoneliike pystyttää pihaansa mainostaulun, jonka taustalevy maalataan. Maalia on varattu 18 $m^2$ pinta-alan maalaamiseen. Kuinka taulun korkeus on valittava, kun taustalevyn kehystämiseen käytetään 20 m rimaa?

234. Neljä neliön muotoista laattaa, joiden sivun pituus on 15,0 cm, asetetaan neliönmuotoiseksi ruudukoksi niin, että laattojen väliin jää yhtä leveät raidat, jotka muodostavat ristin muotoisen kuvion. Mikä on raidan leveys silloin, kun ristin pinta-ala on sama kuin neljän laatan yhteen laskettu pinta-ala? [S1999, 6a]

235. Vaateliike haluaa kolminkertaistaa lehti-ilmoituksensa pinta-alan lisäämällä ilmoituksen korkeutta ja leveyttä yhtä paljon. Mitkä ovat uuden ilmoituksen mitat, kun vanhan ilmoituksen leveys on 3 cm ja korkeus 5 cm?

**Talouselämän sovellukset** E3

236. Kun tuotteen hinta on alle 30 euroa, sen kysyntä riippuu hinnasta seuraavasti: Kun hinta on $p$ € tuotteen kysyntä on $300 - 7p + 0{,}01p^2$ kappaletta. Millä hinnalla tuotetta myydään 200 kappaletta?

237. Torikauppias myy 100 luutaa 3 euron kappalehinnalla. Yhden euron korotus hinnassa vähentää myytyjen luutien määrää 10 kappaleella. Asiakkaat ovat valmiit maksamaan korkeintaan 3 euron hinnan korotuksen. Kuinka monella eurolla luutien hintaa on korotettava, jotta torikauppiaan saamat myyntitulot ovat 400 €? Mikä on tällöin luutien myyntihinta?

238. CD-levyjä myyvä internetkauppa myy päivässä 60 levyä 10 euron hinnalla. Yhden euron korotus levyn hinnassa laskee myyntiä viidellä levyllä. Levyjen kustannukset yritykselle on 2,40 € kappaletta kohti. Kuinka suuri myyntihinta tuotteelle on asetettava, jotta yrityksen voitto olisi 400 € (voitto = myyntitulot – kustannukset)? Levyjen myyntihinnan on oltava vähintään 10 €.

**Sekalaisia tehtäviä**

239. Mainostaja kasvattaa lehdessä olevan ilmoituksen leveyttä ja korkeutta yhtä paljon. Laske uuden mainoksen mitat, kun alkuperäisen mainoksen mitat ovat 5,0 cm × 3,0 cm ja pinta-alan lisäys 18 $\text{cm}^2$.

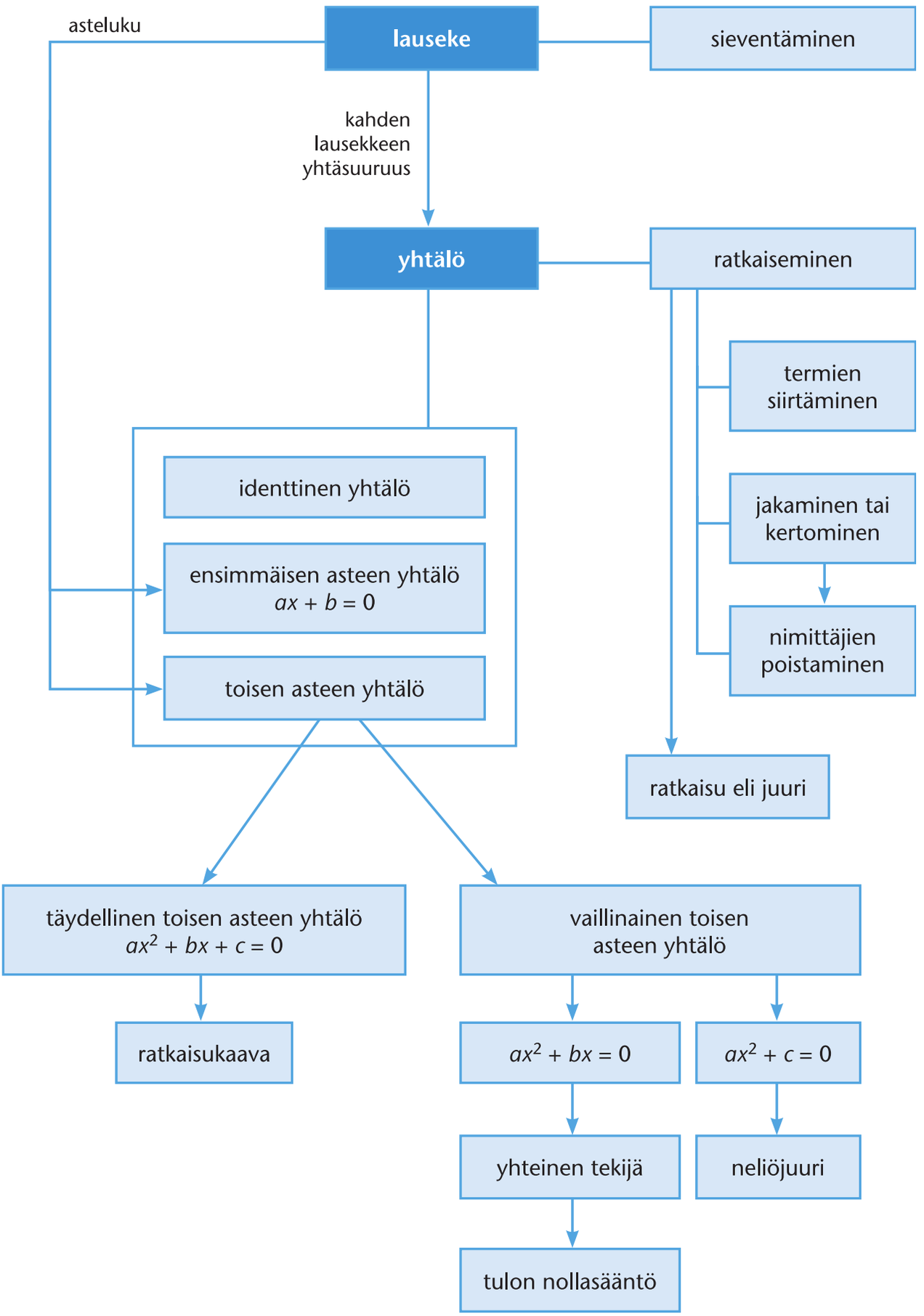
240. Suorakulmion kanta on 3,0 m lyhyempi kuin korkeus. Laske sivujen pituudet, kun suorakulmion ala on 28 $\text{m}^2$.

241. Uimahallin päivittäinen kävijämäärä riippuu uimalipun hinnasta seuraavasti: Kun uimalipun hinta on $x$ euroa, kävijämäärä on $330 - 20x$. Uimahallin asiakkaat ovat valmiit maksamaan uimalipusta korkeintaan 7 euron hinnan. Millä uimalipun hinnalla hallin päivätuotto on 1000 €?

242. Minkä kahden peräkkäisen parittoman luvun tulo on 195?

243. Nollasta eroavan luvun $x$ ja sen käänteisluvun summa on $\frac{13}{6}$. Määritä nämä luvut.

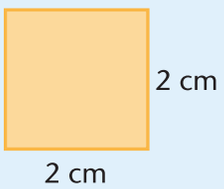
# Keskeisiä käsitteitä

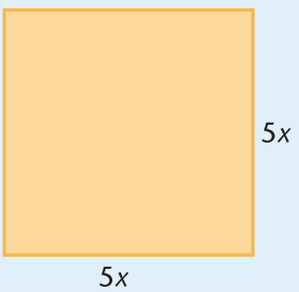


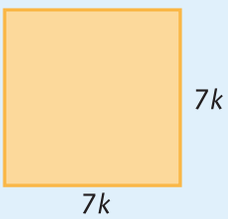
# 4 Verrannollisuus

## 4.1 Suhde ja verranto

**POHDINTA 1** Miksi sivujen pituuksien suhde on seuraavissa tapauksissa 1?

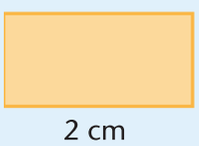
a) 


b) 

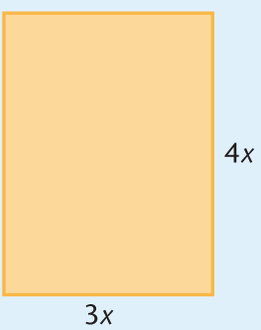

c) 


Mitä voit yleisesti todeta neliön sivujen pituuksien suhteesta?

**POHDINTA 2** Mikä on sivujen pituuksien suhde seuraavissa tapauksissa?

a) 


b)


c) 


### Suhde

**Suhteella** tarkoitetaan kahden luvun tai suureen osamäärää. Jos suureilla on sama yksikkö, niin niiden suhde on aina paljas luku, eli sillä ei ole yksikköä.

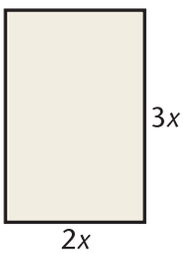
30 euron suhde 150 euroon → $\frac{30\,€}{150\,€} = \frac{30}{150} \overset{(30}{=} \frac{1}{5}$ → suhde 1:5

Suhde merkitään yleensä kaksoispisteen avulla. Jos suhde täytyy esittää mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa, se kannattaa ensin kirjoittaa murtoluvuksi, jolloin sitä on helppo supistaa.

**ESIMERKKI 1** Suorakulmion kannan ja korkeuden pituuksien suhde on 2:3. Määritä sivujen pituudet, kun suorakulmion pinta-ala on $54\ \text{cm}^2$.

**RATKAISU** Koska $\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} = 2{:}3$, niin suorakulmion sivujen pituuksiksi voidaan valita $2x$ ja $3x$.

Suorakulmion pinta-ala on tällöin $2x \cdot 3x$, joten saadaan yhtälö




$$\begin{aligned} 2x \cdot 3x &= 54 \\ 6x^2 &= 54 \qquad \vert : 6 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

Koska pituus ei voi olla negatiivinen, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 3$.

Sivujen pituudet ovat siis $2x = 2 \cdot 3\ \text{cm} = 6\ \text{cm}$ ja $3x = 3 \cdot 3\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$.

**VASTAUS** Sivujen pituudet ovat 6 cm ja 9 cm.

## Verranto

Kun kaksi suhdetta merkitään yhtä suuriksi, saadaan verrantoyhtälö eli verranto.

Tarkastellaan verrantoa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

$\overset{d)}{\frac{a}{b}} = \overset{b)}{\frac{c}{d}}$ — Lavennetaan suhteet samannimisiksi.

$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \quad \vert \cdot bd$ — Kerrotaan nimittäjät pois.

$ad = bc$

Verranto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on siis yhtäpitävä yhtälön $ad = bc$ kanssa. Yhtälö $ad = bc$ saadaan alkuperäisestä yhtälöstä $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ helpoiten **ristiin kertomalla**.

**Verrantoyhtälön ratkaiseminen**

Verrantomuotoinen yhtälö $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ratkaistaan ristiin kertomalla.

josta $ad = bc$.

ESIMERKKI 2 Ratkaise yhtälö.

a) $\frac{x}{3} = \frac{3x-1}{6}$ b) $\frac{x+3}{4} = \frac{7}{x}$

RATKAISU

a)
$$\frac{x}{3} = \frac{3x-1}{6}$$
$$6x = 3(3x-1)$$
$$6x = 9x-3$$
$$-3x = -3 \quad | : (-3)$$
$$x = 1$$

b)
$$\frac{x+3}{4} = \frac{7}{x}$$
$$x(x+3) = 4 \cdot 7$$
$$x^2 + 3x - 28 = 0$$

Ratkaisukaavalla saadaan:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2}$$
$$x = \frac{-3 \pm 11}{2}$$
$$x = 4 \quad \text{tai} \quad x = -7$$

VASTAUS a) $x = 1$ b) $x = 4$ tai $x = -7$

**ESIMERKKI 3**

Pariisissa sijaitsevan Eiffel-tornin korkeus on noin 300 m. Julisteessa tornin pituus oli 105 cm. Kuinka pitkä olisi tornin juurella seisova 180 cm:n pituinen henkilö samassa julisteessa?

**RATKAISU**

Muutetaan Eiffel-tornin korkeus senttimetreiksi.
$300\ \text{m} = 30\,000\ \text{cm}$

Tornin kuvan ja todellisen korkeuden suhde on $\frac{105\ \text{cm}}{30000\ \text{cm}}$.

Jos henkilön pituus julisteessa on $x$ (cm), niin vastaava suhde on $\frac{x\ \text{cm}}{180\ \text{cm}}$.

Koska juliste on pienennös todellisesta tilanteesta, suhteet ovat yhtä suuret.

$$\frac{105}{30000} = \frac{x}{180}$$

Kerrotaan ristiin.

$$30000x = 150 \cdot 180$$
$$30000x = 18900 \qquad |: 30000$$
$$x = 0{,}63$$

**VASTAUS**

Henkilön pituus julisteessa olisi 0,63 cm eli 6,3 mm.

# Tehtäviä

## Suhde

244. Määritä suureiden suhde.

a) 5 m ja 10 cm
b) 200 g ja 40 kg
c) 3 mm ja 3 dm
d) $20x$ ja $36x$

245. Koulun kannatusyhdistyksen 200 jäsenestä viidesosa on ruotsinkielisiä ja loput suomenkielisiä. Mikä on
a) suomenkielisten ja ruotsinkielisten lukumäärien suhde yhdistyksessä
b) suomenkielisten lukumäärän suhde koko yhdistyksen jäsenmäärään?

246. Noora, Iiro ja Aapo jakavat 180 euron palkkion seuraavasti: Noora saa 60 €, Iiro 90 € ja Aapo 30 €. Mikä on
a) Nooran palkkion suhde Iiron palkkioon
b) Aapon palkkion suhde koko palkkiosummaan?

247. Kahden positiivisen kokonaisluvun suhde on 2:5. Määritä luvut, kun lukujen summa on 35.

E1 248. Kahden luvun suhde on 3:4. Määritä luvut, kun lukujen tulo on 192.

249. Kolmion kannan ja korkeuden suhde on 3:5. Määritä kolmion kanta ja korkeus, kun kolmion pinta-ala on 58 cm$^2$. (Kolmion pinta-ala on $A = \dfrac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}$.)

## Verranto

Ratkaise tehtävien 250–254 verrannot.

250. a) $\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{2}{3x} = \dfrac{4}{12}$ c) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{x-1}{3}$

251. a) $\dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{4-3x}{2}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x-2} = \dfrac{3x-2}{3}$

E2 252. a) $\dfrac{3x-4}{5} = \dfrac{2x}{3}$ b) $\dfrac{x-9}{5} = \dfrac{1-x}{x}$

253. a) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{20}{x}$ b) $\dfrac{2x}{10} = \dfrac{25}{5x}$

254. a) $\frac{2}{3x-2}=\frac{3}{4x-2}$ b) $\frac{x-2}{-3x+1}=\frac{x}{x-2}$

255. Olkoon $a$ positiivinen kokonaisluku. Kun $a$ kerrotaan positiivisella luvulla $k$, alkuperäisen luvun $a$ ja tulon $ka$ suhde on 3:5. Mikä on luku $k$?

256. Kuvanveistäjä valmistaa tilaustyönä pienoisveistoksen asiakkaastaan. Pienoisveistoksen korkeus on 25 cm. Mikä on asiakkaan pituus, kun pienoismallin ja asiakkaan pituuksien suhde on 2:15?

E3 257. Ilpo harrastaa pienoismallien rakentelua. Hän on valmistanut kotikylästään tarkan pienoismallin. Kyläkirkon korkeus on pienoismallissa 32 cm ja luonnossa 22 m. Kuinka korkeaksi Ilpon pitää pienoismallissa valmistaa oma kotitalonsa, kun se todellisuudessa on 6,7 metrin korkuinen?

258. Paperiarkilla on kuva Pisan tornista. Kuvaa pienennetään kaksi kertaa. Pienennys tapahtuu kummallakin kerralla suhteessa 4:3. Mikä on näin saadun kopion ja alkuperäisen kuvan tornien korkeuksien suhde?

**Sekalaisia tehtäviä**

Ratkaise tehtävien 259–261 verrannot.

259. a) $\frac{3x}{4}=\frac{1}{6}$ b) $\frac{1-2x}{3}=\frac{3x-1}{-5}$

260. a) $\frac{x-4}{3}=\frac{-1}{x}$ b) $\frac{x-10}{x^2-20}=\frac{1}{2}$

261. a) $\frac{x}{5}=\frac{3}{4x+4}$ b) $\frac{h-3}{3h+2}=\frac{2h-1}{h-2}$

262. Kahden positiivisen kokonaisluvun suhde on 1:4 ja tulo 100. Määritä luvut.

263. Maikki on 25 cm pidempi kuin hänen pikkuveljensä Kyösti. Kuinka pitkiä he ovat, kun heidän pituuksiensa suhde on 6:5?

# 4.2 Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet

**POHDINTA 1**

Tutki, mitä sääntöä lukuarvot $x$ noudattavat. Entä lukuarvot $y$? Mitä huomaat?

a)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 4 | 12 |
| 16 | 48 |
| 64 | |
| | 768 |

b)

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1 | 972 |
| 3 | 324 |
| 9 | 108 |
| 27 | |
| | 12 |

**POHDINTA 2**

Vaasan seudulla asuva Wihtori päätti kiertää kesällä rockfestivaaleja kavereidensa kanssa autolla. Kohteiksi valittiin Seinäjoen Provinssirock, Turun Ruisrock ja Vantaan Ankkarock. Ajomatka kotoa Seinäjoen Provinssirockiin kesti tunnin. Kuinka kauan muut ajomatkat kestivät, jos keskinopeus oli jokaisella matkalla sama?

| | Matka (km) | Ajoaika (h) |
|---|---|---|
| Provinssirock | 80 | 1 |
| Ruisrock | 350 | |
| Ankkarock | 420 | |

## Suoraan verrannollisuus

Kaksi suuretta ovat **suoraan verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen kasvaa samassa suhteessa. Kun nämä suhteet merkitään yhtä suuriksi, saadaan verrantomuotoinen yhtälö, joka ratkaistaan ristiin kertomalla.

**ESIMERKKI 1** Lukiolaisten keskuudessa tehdyn haastattelun perusteella havaittiin, että matematiikan kokeeseen käytetty valmistautumisaika oli suoraan verrannollinen kokeen pistemäärään. Jos opiskelija valmistautui 3 tuntia, hän sai 12 pistettä. Kuinka kauan oli valmistautunut opiskelija, joka sai kokeesta 31 pistettä?

**RATKAISU** Merkitään kysyttyä valmistautumisaikaa kirjaimella $x$ ja kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon.

| Aika (h) | Pisteet |
|---|---|
| 3 | 12 |
| x | 31 |

Valmistautumisaikojen suhde on $\frac{3}{x}$ ja pisteiden suhde $\frac{12}{31}$. Merkitään nämä suhteet yhtä suuriksi ja ratkaistaan verranto.

$$\frac{3}{x} = \frac{12}{31}$$

Kerrotaan ristiin.

$$12x = 3 \cdot 31 \qquad |:12$$

$$x = 7{,}75 \quad (h)$$

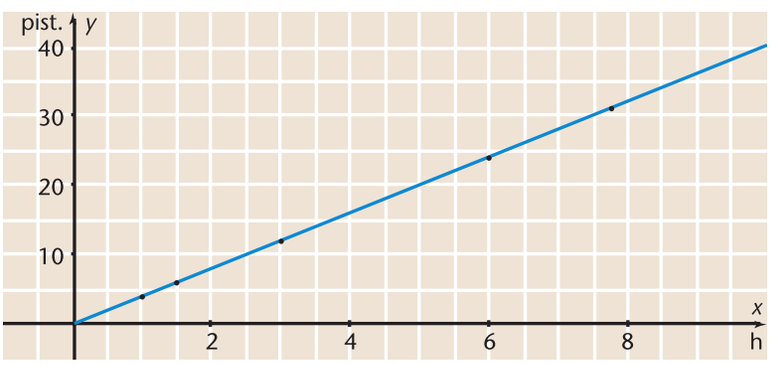
$7{,}75 \text{ h} = 7 \text{ h } (0{,}75 \cdot 60) \text{ min} = 7 \text{ h } 45 \text{ min}$

**VASTAUS** 7 h 45 min valmistautuminen tuotti kokeessa 31 pistettä.

Kuvataan edellisen esimerkin riippuvuutta koordinaatistossa.

| Aika $x$ (h) | Pistemäärä $y$ |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 1,5 | 6 |
| 3 | 12 |
| 6 | 24 |
| 7,75 | 31 |

$\cdot 2$ $\cdot 2$




Suoraan verrannollisten suureiden riippuvuuden kuvaaja on suora. Riippuvuus on siis lineaarista.

**ESIMERKKI 2** Heilurin heilahdusajan neliö on suoraan verrannollinen heilurin pituuteen. Pituuden ollessa 51,0 cm heilahdusaika on 1,5 s. Kuinka pitkä on heilahdusaika, kun heilurin pituus on 80,0 cm?

**RATKAISU** Merkitään heilahdusaikaa kirjaimella $t$.

Neliö tarkoittaa toista potenssia.

| Heilahdusajan neliö ($s^2$) | Pituus (cm) |
|---|---|
| $1{,}5^2$ | 51 |
| $t^2$ | 80 |

Muodostetaan taulukon pohjalta verranto:

$$\frac{1{,}5^2}{t^2} = \frac{51}{80}$$

$$51t^2 = 1{,}5^2 \cdot 80 \quad \vert : 51$$

$$t^2 = \frac{1{,}5^2 \cdot 80}{51}$$

$$t^2 = \frac{180}{51}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{180}{51}}$$

$$t = \pm 1{,}8786...$$

Koska aika ei voi olla negatiivinen, ratkaisuksi kelpaa vain $1{,}8786\ldots$ s $\approx 1{,}9$ s.

**VASTAUS** Heilahdusaika on 1,9 s.

## Kääntäen verrannollisuus

Kaksi suuretta ovat **kääntäen verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa. Tällaisia suureita ovat mm. nopeus ja aika, kun matka on vakio. Jos esimerkiksi nopeus kasvaa kaksinkertaiseksi, aika vähenee puoleen.

| Nopeus $v$ (km/h) | Aika $t$ (h) |
|---|---|
| 10 | 8 |
| 20 | 4 |
| 40 | 2 |
| 80 | 1 |

$\cdot 2$ ja $: 2$

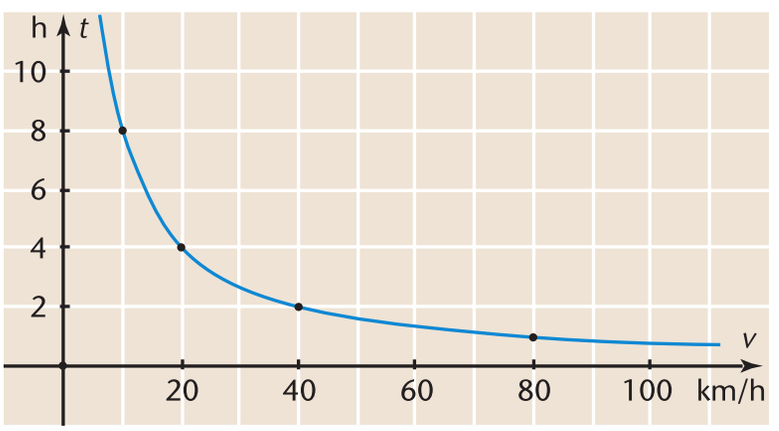
Peräkkäisten nopeuksien suhde on $\frac{10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}}{20\,\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{1}{2}$.

Peräkkäisten aikojen suhde on $\frac{8\,\text{h}}{4\,\text{h}} = \frac{2}{1}$.

Suhteet ovat toistensa käänteislukuja.

Kun muodostetaan kääntäen verrannollisista suureista verrantoa, toinen suhde on käännettävä eli suhteen osoittajan ja nimittäjän paikkoja on vaihdettava.

Kuvataan riippuvuutta koordinaatistossa.




Kääntäen verrannollisten suureiden riippuvuuden kuvaaja on nimeltään **hyperbeli**.

**ESIMERKKI 3** Maikki värvää remonttiavuksi ystävänsä. Kaksistaan heiltä menee katon maalaamiseen 3 tuntia. Kuinka kauan aikaa urakkaan menisi, jos Maikki pyytäisikin mukaan neljä ystäväänsä? Oletetaan, että kaikki maalarit ovat yhtä nopeita.

**RATKAISU** Merkitään maalaamiseen viideltä henkilöltä kuluvaa aikaa kirjaimella $x$ (h).

| Maalareita | Aika (h) |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 5 | $x$ |

Maalareiden määrä ja kuluva aika ovat kääntäen verrannollisia, sillä maalarien määrän kasvaessa jokaisen maalarin työmäärä ja samalla työaika pienenevät samassa suhteessa. Kun muodostetaan verranto, taulukon toisen sarakkeen arvot käännetään. Saadaan yhtälö

$$\frac{2}{5} = \frac{x}{3}$$

$$5x = 6 \quad \big| : 5$$

$$x = \frac{6}{5}$$

**Tapa 1**

$$\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5}\,\text{h} = \frac{1}{5} \cdot 60\,\text{min} = 12\,\text{min}$$

$$1\frac{1}{5}\,\text{h} = 1\,\text{h}\,12\,\text{min}$$

**Tapa 2**

$$\frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$0{,}2\,\text{h} = 0{,}2 \cdot 60\,\text{min} = 12\,\text{min}$$

$$1{,}2\,\text{h} = 1\,\text{h}\,12\,\text{min}$$

**VASTAUS** Aikaa kuluisi 1 h 12 min.

# Tehtäviä

264. a) Tietty matka ajettiin eri nopeuksilla seuraavin tuloksin:

| nopeus (m/s) | 10 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|
| aika (s) | 300 | 150 | 100 | 75 |

Kummasta verrannollisuudesta on kyse? Kuinka pitkä matka ajettiin?

b) Tietyllä nopeudella ajettiin eri matkoja seuraavin tuloksin:

| nopeus (m/s) | 160 | 240 | 280 | 320 |
|---|---|---|---|---|
| aika (s) | 2 | 3 | 3,5 | 4 |

Kummasta verrannollisuudesta on kyse? Kuinka suuri nopeus oli?

**Suoraan verrannollisuus**

265. Neljän ruokailijan pastakastikkeeseen tarvitaan 300 g jauhelihaa ja 150 g mustia oliiveja. Kuinka paljon oliiveja tarvittaisiin, jos jauhelihaa olisi käytettävissä 500 g?

266. Ollin 14 ystävää on tulossa grillijuhliin. Juhlia varten Olli varaa 4,8 kg grillimakkaraa. Olli päättää kutsua juhliin lisäksi myös kolme naapuriaan. Kuinka paljon Ollin täytyy nyt varata makkaraa, kun oletetaan jokaisen vieraan syövän yhtä paljon?

E1 267. Erään kilpikonnalajin kuoren paksuus on suoraan verrannollinen sen ikään siten, että kuoren paksuuden ollessa 3,5 cm kilpikonnan ikä on 70 vuotta. Minkä ikäisen kilpikonnan kuoren paksuus on 2,5 cm?

268. Junamatka Helsingistä Kuopioon (noin 450 km) kesti 4 h 45 min. Kuinka kauan matka Helsingistä Tampereelle (noin 200 km) kestäisi samalla keskinopeudella?

269. Julian koulumatkan pituus on 5,8 km. Skootterilla koulumatkaan kuluu aikaa 10 minuuttia. Julian kotoa on matkaa kirjastoon 9,2 km. Kuinka kauan matka kirjastoon kestää skootterilla, jos oletetaan, että keskinopeus on sama kuin koulumatkalla?

270. Verneri harjoitteli yleisurheilukilpailuja varten 10 000 metrin juoksua. Valmentaja otti harjoituksissa väliaikoja. Juostu matka ja siihen käytetty aika ovat suoraan verrannollisia, jos juostaan koko ajan samalla vauhdilla. Mikä olisi Vernerin loppuaika 10 000 metrillä, jos hän pystyisi juoksemaan samalla vauhdilla koko matkan ja jos väliaika olisi
a) 100 metrin kohdalla 18,3 sekuntia
b) 3600 metrin kohdalla 12 minuuttia?

271. Tasaisessa pyörimisliikkeessä kiertymä on suoraan verrannollinen kiertymään kuluneeseen aikaan. Kellotaulun minuuttiviisarin kiertyessä 12:n kohdalta 3:n kohdalle aikaa kuluu 15 minuuttia ja kiertymä on 90 astetta.
a) Laske minuuttiviisarin kiertymä, kun aikaa on kulunut 24 minuuttia.
b) Laske tuntiviisarin kiertymä, kun aikaa on kulunut 24 minuuttia.

E2 272. Liikkuvan auton pysähtymiseen tarvittava jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Jos auto ajaa nopeudella 80 km/h, sen jarrutusmatka on 45 m. Kuinka suurella nopeudella auton tulee ajaa, jotta sen jarrutusmatka olisi 30 m?

273. Veneen pohjassa olevasta reiästä tulee aikayksikössä sisään vesimäärä, joka on suoraan verrannollinen reiän halkaisijan neljänteen potenssiin. Yhdellä pumpulla pystytään pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,2 cm:n läpimittainen reikä. Kuinka monta samanlaista pumppua tarvitaan pitämään tyhjänä vene, jonka pohjassa on 1,9 cm:n läpimittainen reikä? [K1998, 7b]

274. Kalle ja Ville olivat kesätöissä rakennustyömaalla. Maanantaina Kalle kantoi kasan tiiliä, johon häneltä kului aikaa 2 tuntia. Tiistaina Ville kantoi yhtä suuren kasan tiiliä, mutta häneltä kului aikaa 4 tuntia. Keskiviikkona Kalle ja Ville kantavat yhdessä taas samankokoisen tiilikasan. Kuinka kauan heiltä kuluu tähän aikaa, kun molempien työtahti säilyy ennallaan?

**Kääntäen verrannollisuus**

275. Eräässä paikallislehdessä uutisten pituus on kääntäen verrannollinen tapahtumapaikan etäisyyteen keskustasta. Koulun oppilaiden ulkomaanmatka oli saanut palstatilaa 2500 millimetriä. Koulu sijaitsee 270 metrin päässä torilta. Kuinka paljon palstatilaa sai 2,0 km:n päässä keskustasta tapahtunut auton ulosajo?

E3 276. Pariskunta arvioi selviävänsä muuttourakasta 7 tunnissa. Kuinka monta yhtä reipasta apulaista he tarvitsisivat lisää, jotta urakka olisi valmis 4 tunnissa?

277. Kylpyhuoneen lattia kaakeloidaan 100 $cm^2$:n suuruisilla laatoilla, joita tarvitaan 350 kappaletta. Jos lattian kaakeloimiseen käytettäisiin 60 $cm^2$:n laattoja, kuinka monta niitä tarvittaisiin?

278. Rullaluistelija taittoi päivittäisen työmatkansa 45 minuutissa, kun hän luisteli nopeudella 12 km/h. Eräänä päivänä samaan matkaan kului aikaa vain 38 minuuttia.
   a) Mikä oli tällöin rullaluistelijan nopeus, jos hän luisteli koko matkan samalla nopeudella?
   b) Rullaluistelija luisteli puolet työmatkastaan nopeudella 12 km/h. Millä nopeudella hän luisteli loppumatkan, kun koko matkaan kului 38 minuuttia?

279. Automatka toiseen kaupunkiin keskinopeudella 85 km/h kestää 45 min. Kuinka kauan matka kestää, kun keskinopeus on 8 km/h suurempi?

280. Jos kappaleen massa pysyy vakiona, kappaleen tiheys on kääntäen verrannollinen kappaleen tilavuuteen. Kaisalla on kaksi samanpainoista kappaletta. Toisen tilavuus on 0,35 $dm^3$ ja toisen 0,18 $dm^3$. Kaisa tietää, että tilavuudeltaan suuremman kappaleen tiheys on 4,3 $kg/dm^3$.
   a) Laske tilavuudeltaan pienemmän kappaleen tiheys.
   b) Laske kappaleiden massat.

281. Vakiolämpötilassa kaasun paine on kääntäen verrannollinen kaasun tilavuuteen. Männällä varustetussa sylinterissä kaasun paine on 4,6 kPa ja tilavuus 10 l. Laske kaasun tilavuus 9,5 kPa:n paineessa.

282. Kuullun äänen voimakkuus riippuu äänen intensiteetistä. Milla kuunteli festareilla suosikkilaulajaansa 120 metrin päässä esiintymislavasta. Nähdäkseen paremmin Milla siirtyi lähemmäs lavaa, jolloin äänen intensiteetti kasvoi 100-kertaiseksi. Kuinka lähelle lavaa Milla siirtyi, kun intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön?

**Sekalaisia tehtäviä**

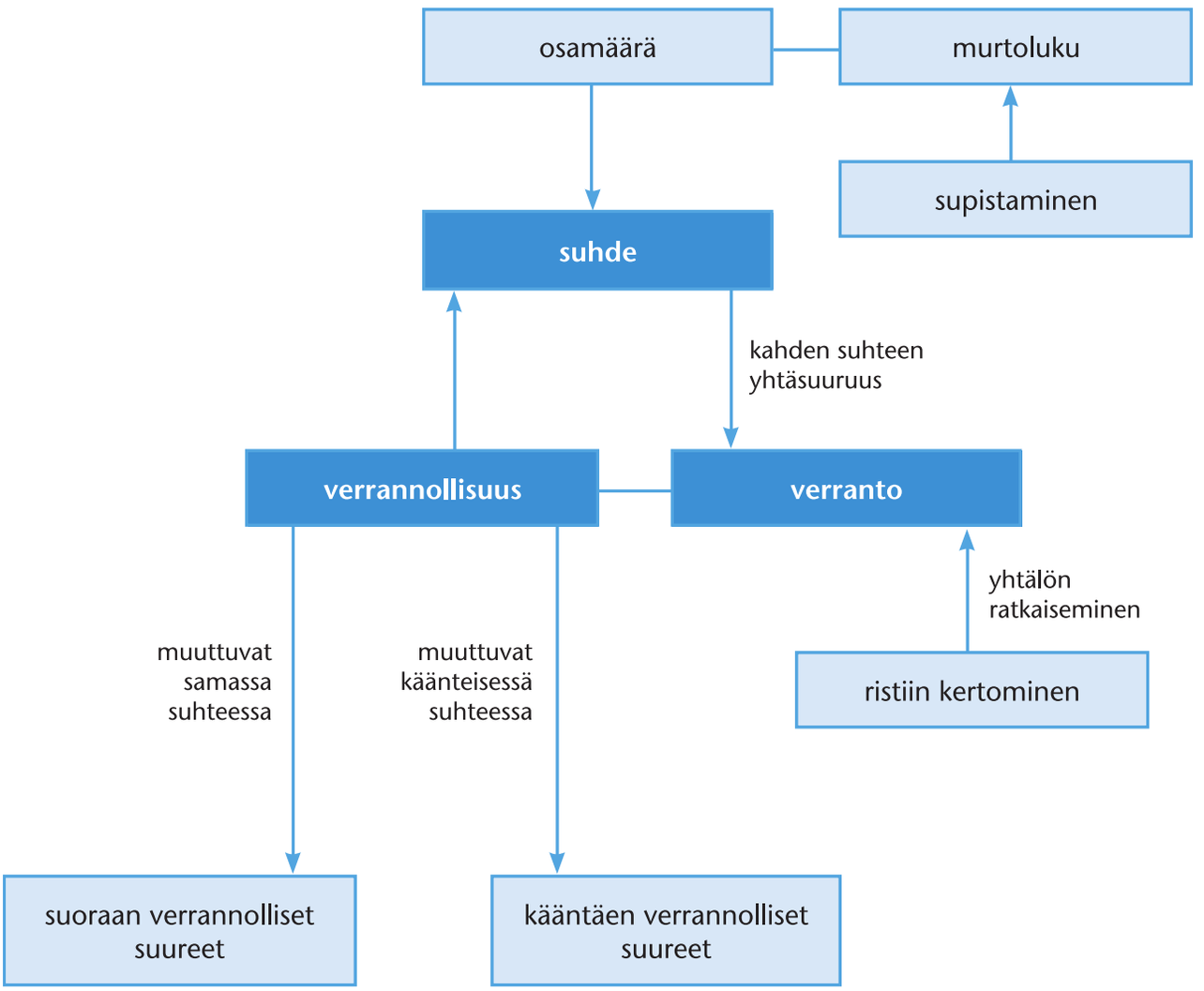
283. Keväällä 2009 Helsingin ydinkeskustasta myytiin 63 $m^2$:n kaksio 310 000 euron hintaan. Kuinka suuren asunnon saisi 120 000 eurolla, jos neliöhinta olisi sama?

284. Kauppias havaitsi, että hänen mainontaan käyttämänsä rahamäärä on suoraan verrannollinen myynnin euromääräiseen kasvuun. Kun kauppias käytti mainontaan 500 euroa, myynti lisääntyi 1700 eurolla.
   a) Kuinka paljon kauppias käyttäisi mainontaan, jos myynti kasvaisi 1300 euroa?
   b) Kuinka paljon myynti kasvaisi, jos kauppias käyttäisi mainontaan 1200 euroa?

285. Valaistus on kääntäen verrannollinen valonlähteen etäisyyden neliöön. Valaistus 1,5 m:n etäisyydellä Vilman työpöydästä on 56 luksia. Kuinka suuri on valaistus 2,3 m:n päässä?

286. Kaarteessa auton normaalikiihtyvyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön kaarteen säteen (kaarevuussäde) pysyessä samana. Jos auton nopeus on 60 km/h, normaalikiihtyvyys on 2,76 $m/s^2$. Kuinka suuri on auton nopeus, jos normaalikiihtyvyys on 4,91 $m/s^2$?

# Keskeisiä käsitteitä



# 5 Prosenttilaskenta

## 5.1 Prosenttilaskennan perustilanteita

Kahden luvun suhteella tarkoitetaan lukujen merkittyä osamäärää. Suhteen arvo on aina yksikötön luku. Esimerkiksi 10 euron ja 20 euron suhde on

$$\frac{10\ €}{20\ €} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Suhteelliset osuudet voidaan ilmoittaa **prosentteina**. Prosentti tarkoittaa sadasosaa, ja sitä merkitään symbolilla %: $1\,\% = \frac{1}{100}$. Esimerkiksi 10 euroa on 20 eurosta

$$0{,}5 = 0{,}50 = \frac{50}{100} = 50\,\%$$

Suhteellinen osuus lasketaan vertaamalla arvoa johonkin **perusarvoon**. Koska perusarvo on se, johon verrataan, sen osuus on 100 %.

Promille
s. 155

**Prosentti**

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

## Kuinka monta prosenttia luku *a* on luvusta *b*?

Kun verrataan kahta lukua, lasketaan ensin näiden lukujen suhde. Suhteen arvo muutetaan prosenteiksi kertomalla sadalla.

| Kysymys | Suhteen arvo | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Murtolukuna | Desimaaliluku na | Sadasosina | Prosentteina |
| Kuinka paljon luku 3 on luvusta 10? | $\frac{3}{10}$ | 0,3 | $\frac{30}{100}$ | $0{,}3 \cdot 100\ \% = 30\ \%$ |
| Kuinka paljon 3 on 50:stä? | $\frac{3}{50}$ | 0,06 | $\frac{6}{100}$ | $0{,}06 \cdot 100\ \% = 6\ \%$ |
| Mikä on luvun 4 suhteellinen osuus luvusta 5? | $\frac{4}{5}$ | 0,8 | $\frac{80}{100}$ | $0{,}8 \cdot 100\ \% = 80\ \%$ |
| Mikä on luvun 1 suhteellinen osuus luvusta 250? | $\frac{1}{250}$ | 0,004 | $\frac{0{,}4}{100}$ | $0{,}004 \cdot 100\ \% = 0{,}4\ \%$ |

Suhdetta muodostettaessa on tärkeää kiinnittää huomiota siihen, **mitä** lukua halutaan verrata ja **mihin** sitä verrataan.

$$\frac{\text{mitä verrataan}}{\text{mihin verrataan}}$$

Kun halutaan laskea luvun $a$ prosentuaalinen osuus luvusta $b$, lasketaan ensin suhteen $\frac{a}{b}$ arvo ja ilmoitetaan se sitten prosentteina eli muodossa $p\ \%$.

Kuinka monta prosenttia luku $a$ on luvusta $b$?

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \quad \big| \cdot 100$$

$$p = \frac{a}{b} \cdot 100$$

$$p\ \% = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$$

**Lukujen suhde prosentteina**

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \quad \text{eli} \quad p\,\% = \frac{a}{b} \cdot 100\,\%$$

- $a$ on vertailuarvo.
- $b$ on perusarvo.
- $p$ on prosenttiluku.

ESIMERKKI 1

Tanja pesi 115 cm:n pituisen kesähameen ensimmäistä kertaa. Hame kutistui pesussa 5,0 cm. Kuinka monta prosenttia hame kutistui?

RATKAISU

Verrataan kutistumaa hameen alkuperäiseen pituuteen:

$$\frac{\text{kutistuma}}{\text{hameen pituus}} = \frac{5{,}0\ \text{cm}}{115\ \text{cm}} = 0{,}0434\ldots \approx 4{,}3\,\%$$

Tehtävän ratkaisemiseen voi käyttää myös verrantomuotoista yhtälöä:
$\frac{5}{115} = \frac{p}{100}$.

VASTAUS

Hame kutistui 4,3 %.

**Kuinka paljon on $p$ % luvusta $b$?**

Laskuissa prosenttiluku $p$ % muutetaan yleensä joko desimaaliluvuksi tai murtoluvuksi. Tätä prosenttiluvun esitysmuotoa kutsutaan **prosenttikertoimeksi**.

| Prosentti-merkintä | Prosenttikerroin | |
|---|---|---|
| | Murtoluku | Desimaaliluku |
| 45 % | $\frac{45}{100}$ | 0,45 |
| 2 % | $\frac{2}{100}$ | 0,02 |
| 0,3 % | $\frac{0{,}3}{100} = \frac{3}{1000}$ | 0,003 |
| 137 % | $\frac{137}{100}$ | 1,37 |
| $p$ % | $\frac{p}{100}$ | $0{,}01 \cdot p$ |

Prosenttiosuus perusarvosta saadaan kertomalla perusarvo prosenttikertoimella.

Kuinka paljon on $p$ % luvusta $b$?

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \quad | \cdot b$$
$$a = \frac{p}{100} \cdot b$$

**Prosenttiosuus perusarvosta**

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \quad \text{eli} \quad a = \frac{p}{100} \cdot b$$

ESIMERKKI 2

Laila osti huhtikuussa puhelimen 248,50 eurolla. Verneri osti samanlaisen puhelimen heinäkuun alennusmyynnistä 35 prosentin alennuksella. Kuinka monta euroa halvemmalla Verneri sai puhelimen kuin Laila?

RATKAISU

Lasketaan kuinka paljon 35 % on 248,50 eurosta.

$$0{,}35 \cdot 248{,}50\ € = 86{,}975\ € \approx 86{,}98\ €$$

Tehtävän ratkaisemiseen voi myös käyttää verrantomuotoista yhtälöä: $\frac{a}{248{,}50} = \frac{35}{100}$.

VASTAUS

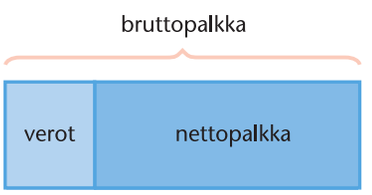
Vernerin puhelin maksoi 86,98 € vähemmän.

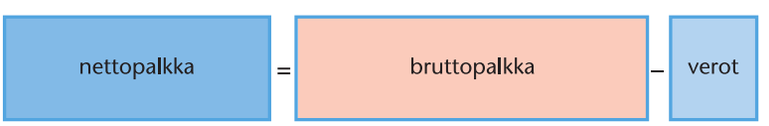
ESIMERKKI 3

Veera maksaa 2350 euron bruttopalkasta 30 % veroa. Laske Veeran nettopalkka.

RATKAISU

Veera maksaa veroja
$0{,}3 \cdot 2350\ € = 705\ €$.




Nettopalkka on $2350\ € - 705\ € = 1645\ €$.

VASTAUS

Veeran nettopalkka on 1645 €.

**ESIMERKKI 4** Vesalle jää 1960 euron bruttopalkasta verojen jälkeen käteen 72 %. Käteen jäävästä rahasta Vesalla menee asunnon vuokraan 35 %. Kuinka suuri on Vesan asunnon vuokra?

**RATKAISU** Nettopalkka on $0{,}72 \cdot 1960{,}00$ euroa.
Nettopalkasta 35 % menee vuokraan.

Asunnon vuokra on
$0{,}35 \cdot 0{,}72 \cdot 1960{,}00$ euroa = 493,92 euroa

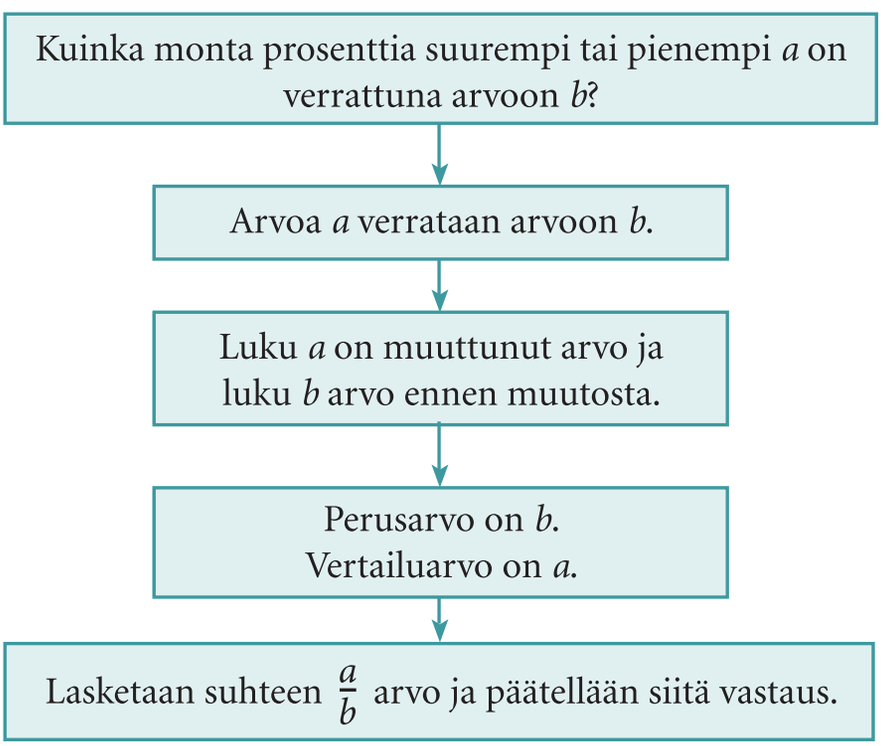
**VASTAUS** Asunnon vuokra on 493,92 euroa.

## Muutos ja vertailu

Prosenttilaskennassa esiintyvät usein seuraavat tilanteet:

- Muuttunutta arvoa verrataan alkuperäiseen arvoon ja halutaan tietää muutoksen suuruus prosentteina.
- Halutaan laskea muuttunut arvo, kun tiedetään muutos prosentteina.

Jos kahta suuretta verrataan toisiinsa tai halutaan tietää muutoksen suuruus prosentteina, on tunnistettava perusarvo ja **vertailuarvo**.



**ESIMERKKI 5**

Lassin kuukausipalkka on 1800 € ja Leevin 2025 €. Lassin palkkaa nostetaan siten, että uudeksi kuukausipalkaksi tulee 1944 €.

a) Kuinka monta prosenttia Lassin palkka nousee?

b) Kuinka monta prosenttia pienempi Lassin korotettu palkka on kuin Leevin palkka?

**RATKAISU**

a) **Tapa 1**

Lasketaan ensin palkankorotus euroina.

$$1944\ € - 1800\ € = 144\ €$$

Lasketaan sitten, kuinka monta prosenttia korotus on alkuperäisestä palkasta.

$$\frac{144\ €}{1800\ €} = 0{,}08 = 8\ \%$$

**Tapa 2**

Perusarvo on Lassin alkuperäinen palkka. Verrataan korotettua palkkaa siihen.

$$\frac{1944\ €}{1800\ €} = 1{,}08 = 108\ \%$$

$\frac{\text{korotettu palkka}}{\text{alkuperäinen palkka}}$

Alkuperäistä palkkaa vastaava prosenttiluku on 100 %, eli palkka on noussut 108 % – 100 % = 8 %.

b) **Tapa 1**

Lasketaan ensin palkkojen erotus euroina.

$$2025\ € - 1944\ € = 81\ €$$

Lasketaan sitten, kuinka monta prosenttia erotus on Leevin palkasta.

$$\frac{81\ €}{2025\ €} = 0{,}04 = 4\ \%$$

**Tapa 2**

Perusarvo on Leevin palkka, ja Lassin korotettua palkkaa verrataan siihen.

$$\frac{1944\ €}{2025\ €} = 0{,}96 = 96\ \%$$

$\frac{\text{Lassin korotettu palkka}}{\text{Leevin palkka}}$

Perusarvoa eli Leevin palkkaa vastaava prosenttiluku on 100 %, joten Lassin korotettu palkka on 100 % – 96 % = 4 % pienempi kuin Leevin.

**VASTAUS**

a) nousee 8 %

b) 4 % pienempi

Jos halutaan laskea muuttunut arvo, kun muutoksen suuruus prosentteina tunnetaan, voidaan ensin laskea lukumääräinen (absoluuttinen) muutos ja sitten lisätä se alkuperäiseen arvoon tai vähentää se alkuperäisestä arvosta.

- Lassin palkka on ennen palkankorotusta 1800 €. Lassin palkkaa korotetaan 8 %. Kuinka suuri palkka on korotuksen jälkeen?

Palkankorotus euroina
0,08 · 1800 € = 144 €

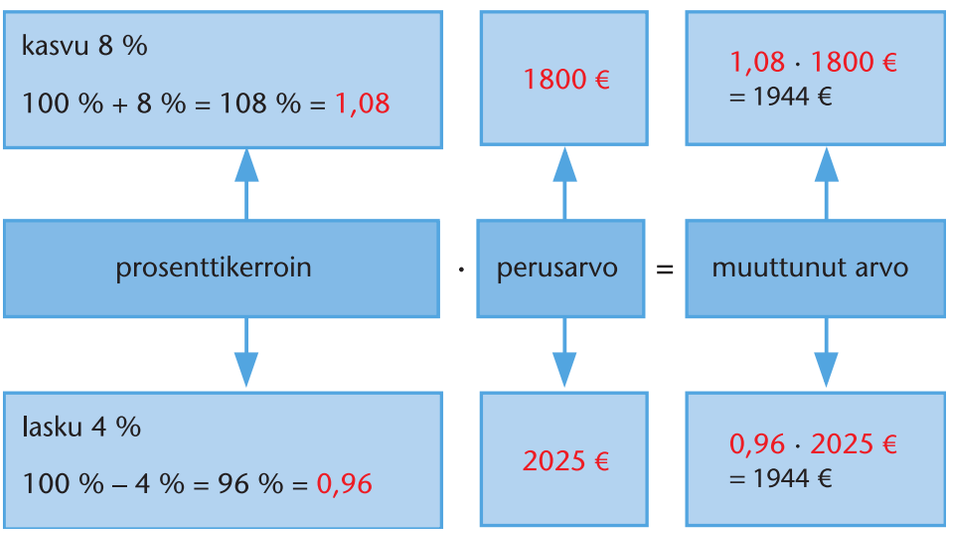
Korotettu palkka
1800 € + 144 € = 1944 €

- Leevin palkka on 2025 €. Lassin palkka on 4 % pienempi kuin Leevin palkka. Kuinka suuri Lassin palkka on?

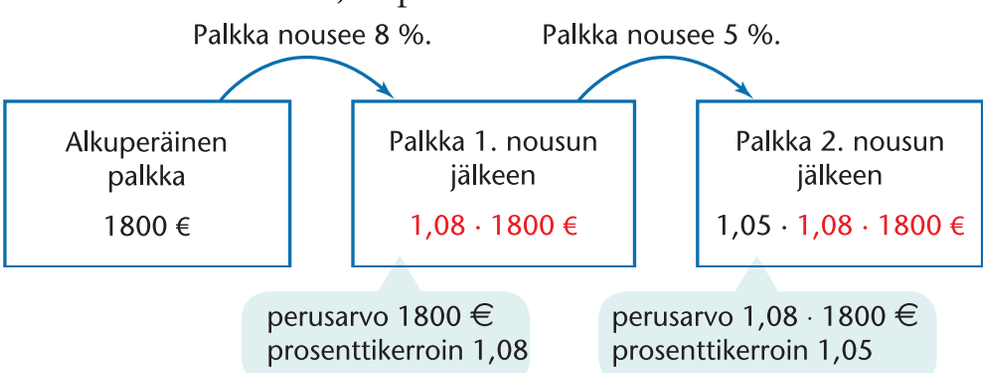
4 % Leevin palkasta on
0,04 · 2025 € = 81 €.

Lassin palkka on
2025 € – 81 € = 1944 €.

Monissa yhtälötehtävissä on helpointa käyttää **prosenttikerrointa**. Se on muuttunutta arvoa vastaavan prosenttiluvun desimaali- tai murtolukumuotoinen esitys.




Perusarvo voi nousta ja laskea myös useampia kertoja peräkkäin. Tällöin jokainen muuttunut arvo lasketaan viimeisimmästä muuttuneesta arvosta, eli perusarvo muuttuu.




Tällaisiin tilanteisiin tutustutaan lisää eksponentiaalisen muutoksen yhteydessä kurssilla ”Matemaattisia malleja I”.

Jos perusarvon suuruutta ei tiedetä, niin perusarvoa merkitään kirjaimella. Perusarvolle ei voi valita mitään tiettyä ”sopivan tuntuista” lukuarvoa. Esimerkiksi hinnaksi ei voi valita arvoa 100 euroa.

Kun suureen arvoa ei tiedetä, tilannetta on usein helpompi tarkastella prosenttikertoimen avulla.

**ESIMERKKI 6**

Tuotteen hintaa nostettiin ensin 35 %.

a) Alennusmyyntiaikaan hintaa alennettiin 40 %. Kuinka paljon tuotteen hinta oli tällöin muuttunut verrattuna alkuperäiseen hintaan?

b) Hinnannoston seurauksena kappalemääräinen viikkomyynti putosi 20 %. Miten viikoittainen myyntitulo muuttui?

**RATKAISU**

a) Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella $a$.

Hintaa korotettiin ensin 35 %. Korotukseen liittyvä prosenttikerroin on

$$100\ \% + 35\ \% = 135\ \% = 1{,}35$$

Hinta oli korotuksen jälkeen $1{,}35a$.

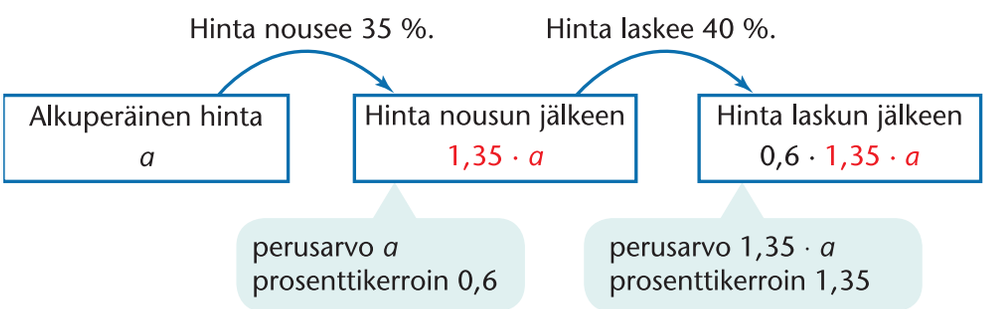
Hintaa alennettiin 40 %. Alennukseen liittyvä prosenttikerroin on

$$100\ \% - 40\ \% = 60\ \% = 0{,}6$$

Hinta oli alennuksen jälkeen $0{,}6 \cdot 1{,}35a = 0{,}81a$.

Alkuperäinen hinta oli siis tullut 0,81-kertaiseksi, eli tuotteen hinta oli laskenut

$$100\ \% - 81\ \% = 19\ \%$$



b) Merkitään tuotteen alkuperäistä hintaa kirjaimella $a$ ja kappalemääräistä myyntiä ennen korotusta kirjaimella $b$.

Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon.

| | Ennen muutosta | Muutoksen jälkeen |
|---|---|---|
| Hinta (€/kpl) | $a$ | $1{,}35a$ |
| Myynti (kpl) | $b$ | $0{,}8b$ |
| Myyntitulo (€) | $ab$ | $1{,}35a \cdot 0{,}8b$ |

Myyntitulo hinnankorotuksen jälkeen on

$$1{,}35a \cdot 0{,}8b = 1{,}08ab$$

Verrattuna aikaisempaan myyntituloon $ab$ myyntitulo on tullut 1,08-kertaiseksi eli kasvanut 8 %.

VASTAUS a) Tuotteen hinta laski 19 %. b) Myyntitulo kasvoi 8 %.

## Prosenttiyksikkö

Joidenkin suureiden arvoja tarkastellaan aina prosentteina. Tällaisia ovat esimerkiksi ilman suhteellinen kosteus ja Euroopan keskuspankin viitekorko (euribor). Tällaisessa suureessa tapahtuvia muutoksia voidaan tarkastella kahdella tavalla.

Jos esimerkiksi Euroopan keskuspankki laskisi euriborkorkoa 5,4 prosentista 4,8 prosenttiin, niin

- suureen absoluuttinen muutos on $5{,}4 - 4{,}8 = 0{,}6$ **prosenttiyksikköä**
- suureen suhteellinen muutos on $\frac{0{,}6}{5{,}4} = 0{,}111\ldots \approx 11\,\%$

**Vertaa:**
Pituus muuttuu 5,4 metristä 4,8 metriin.

- Suureen absoluuttinen muutos on $5{,}4\text{ m} - 4{,}8\text{ m} = 0{,}6\text{ m}$.
- Suureen suhteellinen muutos on $\frac{0{,}6}{5{,}4} = 0{,}111\ldots \approx 11\,\%$.

# Tehtäviä

**Kuinka monta prosenttia luku *a* on luvusta *b*?**

287. Laske, kuinka monta prosenttia
a) luku 18 on luvusta 55 b) luku 2 on luvusta 55.

288. Suomalaisten 15–19-vuotiaiden ikäluokasta tyttöjä on 163 216 ja poikia 169 961 (Tilastokeskus, 2008). Kuinka monta prosenttia on a) tyttöjä b) poikia?

E1 289. Kaksion vuokra oli 580 euroa. Vuokranantaja korotti vuokraa 30 eurolla. Kuinka monta prosenttia vuokra nousi?

290. Luokan 28 oppilaasta oli matematiikan kokeesta poissa 4 oppilasta. Näistä yksi ei ehtinyt koetunnille ja loput olivat sairaana. Kuinka monta prosenttia
a) oppilaista oli poissa kokeesta
b) poissaolijoista oli sairaana?

291. Kuparisulfaattiliuoksen massa on 133 g, josta 12,4 g on kuparisulfaattia ja loput vettä. Laske liuoksen pitoisuus massaprosentteina.

292. Suomen lipun pituus on 18, leveys 11 sekä ristin sakaroiden leveys 3 pituusyksikköä. Montako prosenttia lipun pinta-alasta on sinistä? [K1986, 4]

**Kuinka paljon on *p* % luvusta *b*?**

293. Laske a) 15 % luvusta 150 b) 26,5 % luvusta 120.

294. Ammoniakki liukenee hyvin veteen. Kaksi litraa ammoniakin vesiliuosta oli pitoisuudeltaan 35 tilavuusprosenttista. Kuinka paljon ammoniakkia liuos sisälsi?

E2 295. Loppukesän alennusmyynnissä liike A antoi 160 euron puhelimesta 25 euron alennuksen. Liike B antoi samasta 160 euron puhelimesta 15 % alennusta. Kummasta liikkeestä puhelimen sai halvemmalla?

E3 296. Tiinan bruttopalkka on 1700 €. Palkasta menee veroa 26 %. Kuinka paljon Tiina maksaa veroa? Kuinka paljon hänelle jää palkasta omaan käyttöön?

297. Urheiluliike myy juoksukenkiä hintaan 62 €. Myyntiä vauhdittaakseen kauppias alentaa hintaa 20 %. Laske kenkien uusi hinta.

298. Suolaliuoksen suolapitoisuus on 0,18 massaprosenttia. Liuosta on 12 kiloa. Nestettä haihdutetaan 2 kiloa. Mikä on syntyneen liuoksen suolapitoisuus?

299. Asunto-osakeyhtiö nosti asuntojen yhtiövastikkeita 8,5 %. Kuinka suureksi muodostui 64,5 neliömetrin suuruisen asunnon kuukauden yhtiövastike, kun neliömetriltä oli aiemmin maksettu 2 euroa kuukaudessa? [K2000,1]

300. Vilmalla on 230 kilometrin matka kotoa mökille. Normaalisti Vilma ajaa mökkimatkan nopeudella 90 km/h. Kuinka paljon Vilma voittaisi ajassa, jos hänen keskinopeutensa kasvaisi 15 %?

E4 301. Iirolla on 1300 levyn musiikkikokoelma. Kokoelman levyistä 35 % on jazzlevyjä. Jazzlevyistä 20 % on suomalaista jazzia. Kuinka monta suomalaista jazzlevyä Iirolla on?

302. Rahtialukseen oli lastattu hedelmiä. Laivassa oli 4500 kg appelsiineja. Omenoita oli 25 % enemmän kuin appelsiineja. Banaaneja oli puolestaan 35 % enemmän kuin omenoita. Kuinka paljon laivassa oli omenoita ja banaaneja?

303. Tilastokeskuksen kuluttajabarometrin mukaan heinäkuussa 1999 matkapuhelin oli kotitalouksissa ensi kertaa lankapuhelinta yleisempi. Kotitalouksista 78,5 prosentilla oli käytössään matkapuhelin ja 75,8 prosentilla lankapuhelin. Kotitalouksista 22,9 prosentilla oli vain matkapuhelin. Kuinka monella prosentilla kotitalouksista oli käytössään vain lankapuhelin? Kuinka monella prosentilla niistä, joilla oli käytössää lankapuhelin, oli käytössään myös matkapuhelin? [K2000,7]

**Muutos ja vertailu**

304. Tuotteen hinta on alussa $a$ euroa. Miten hinta on muuttunut, jos uusi hinta on
a) $1{,}2a$ b) $0{,}35a$ c) $0{,}003a$ d) $2{,}5a$?

305. Kuinka monta prosenttia luku 15 on
a) suurempi kuin 10 b) pienempi kuin 20?

E5 306. Sauropodit olivat suurimpia koskaan eläneitä maaeläimiä. Täysikasvuinen brachiosaurus painoi 70 000 kg ja diplodocus 40 000 kg. Nykyisistä maaeläimistä painavin on afrikannorsu, joka voi painaa 4000 kg.

a) Kuinka monta prosenttia brachiosaurus on diplodocusta painavampi?

b) Kuinka monta prosenttia brachiosaurus on afrikannorsua painavampi?

307. Vernerin veroprosentti nousi 30 prosentista 32,5 prosenttiin.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä veroprosentti nousi?

b) Kuinka monta prosenttia veroprosentti nousi?

308. Pussikeiton suolapitoisuutta alennettiin 1,6 prosentista 1,1 prosenttiin.

a) Kuinka monta prosenttiyksikköä suolapitoisuutta laskettiin?

b) Kuinka monta prosenttia suolapitoisuus aleni?

309. Alennusmyynnissä 232,50 euron MD-soitin myytiin 199,50 eurolla. Laske alennusprosentti.

310. Pihassa olevaan sadevesiastiaan mahtuu 45 litraa vettä. Astiassa on tällä hetkellä vettä 34 litraa. Kuinka monta prosenttia astiasta on tyhjänä?

311. Litran lasipulloon kaadetaan 0,86 l mehua. Pullon jäätyessä mehun tilavuus kasvaa 8 %. Halkeaako pullo?

312. Raskaan työn raatajan päivittäinen energiankulutus oli keskimäärin 14 000 kJ. Hänen toimistotyössä oleva kaksoisveljensä kulutti 22 % vähemmän. Laske kaksoisveljen energiankulutus.

313. Lääketehtaan valmistamassa 500 milligramman särkylääkkeessä oli alun perin 420 milligrammaa vaikuttavaa ainetta. Saadakseen lääkkeen reseptivapaaseen myyntiin tehdas alensi vaikuttavan aineen määrää 35 %. Kuinka paljon lääkkeessä oli tämän jälkeen vaikuttavaa ainetta?

E6 314. Tuotteen hintaa nostettiin joulun myyntiin 15 %. Joulun jälkeisessä alennusmyynnissä hintaa laskettiin 20 %. Miten tuotteen hinta muuttui?

315. Jaakko tarkkaili ostamiensa akvaariokalojensa kasvua. Ensimmäisen kuukauden aikana hän arveli kalojen kasvaneen 12 %, toisen kuukauden aikana 15 % ja kolmannen kuukauden aikana 8 %. Kuinka monta prosenttia kalat olivat kasvaneet kolmen kuukauden aikana?

316. Vaateliike myy alennusmyynnissä tuotteita 40 prosentin alennuksella. Kahden viikon kuluttua alkaa lisäalennusmyynti, jossa tuotteiden hintoja alennetaan vielä 40 %. Tavaratalo puolestaan alensi hintoja suoraan 70 prosenttia. Vilhelmiina löysi samanlaisen paidan kummastakin kaupasta. Kummasta kaupasta paita kannatti ostaa, kun hinta ennen alennuksia oli 46,50 €?

317. Sähkön hintaa nostettiin vuoden alussa 11 % ja vuoden lopussa taas 11 %. Kuinka monta prosenttia hinta kaikkiaan nousi? [K1990, 2]

318. Tuotteen hintaa nostettiin 18 %. Tällöin tuotteen kysyntä laski 23 %. Miten muuttuivat tuotteen myynnistä saatavat myyntitulot?

**Sekalaisia tehtäviä**

319. Arttu maksaa 2010 euron palkastaan veroja 653 euroa.
a) Laske Artun veroprosentti.
b) Kuinka monta prosenttia Artulle jää palkasta käteen?

320. Kaupungin sisäisen kertalipun hinta on 1,90 €. Vuoden vaihteessa hintoja korotetaan 26 %. Kuinka paljon lippu maksaa korotuksen jälkeen?

321. Samulin 2300 euron bruttopalkasta menee veroa 28,5 %. Nettopalkasta lainojen maksuun menee 10 % ja tämän jälkeen jäljelle jäävästä rahasummasta vuokraan 600 €. Kuinka paljon Samulille jää käyttörahaa?

322. Mervi lyhennytti pitkää hamettaan aluksi 15 %, mutta hametta oli tämän jälkeen vielä lyhennettävä 20 %. Kuinka monta prosenttia hame kaikkiaan lyheni?

323. Vadelmamehun sokeripitoisuus on 8,4 % ja puolukkamehun sokeripitoisuus 3,1 %. Mehuja sekoitetaan suhteessa 1:2. Mikä on valmistetun sekamehun sokeripitoisuus?

# 5.2 Prosenttiyhtälöitä

Prosenttilaskennassa tulee usein eteen tilanteita, joissa tiedetään muuttuneen arvon suuruus ja kysytään joko alkuperäistä perusarvoa tai muutosprosenttia. Näissä tilanteissa kannattaa usein ongelman ratkaisemiseksi muodostaa yhtälö. Yhtälön voi muodostaa esimerkiksi

- prosenttilaskennan verrantoyhtälöstä

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \qquad \frac{\text{muuttunut arvo}}{\text{perusarvo}} = \text{prosenttikerroin}$$

- prosenttikertoimen avulla

$$\frac{p}{100} \cdot b = a \qquad \text{prosenttikerroin} \cdot \text{perusarvo} = \text{muuttunut arvo}$$

Muodostetusta yhtälöstä ratkaistaan perusarvo, jos tehtävässä kysytään alkuperäistä suureen arvoa. Prosenttikerroin ratkaistaan silloin, kun halutaan tietää, montako prosenttia suureen arvo muuttuu.

**Perusarvon laskeminen**

1. Merkitään perusarvoa kirjaimella $x$.
2. Muodostetaan muuttunutta arvoa kuvaava lauseke perusarvon $x$ ja prosenttikertoimen avulla.
3. Muodostetaan yhtälö.
4. Ratkaistaan yhtälöstä perusarvo $x$.

**ESIMERKKI 1**

Kunnan väkiluku pieneni vuosittain 4,5 % muuttotappion seurauksena. Vuonna 2009 asukasluku oli 12 500. Kuinka paljon asukkaita oli vuonna 2008?

**RATKAISU**

Merkitään vuoden 2008 väkilukua kirjaimella $x$.

Koska väkiluku pieneni 4,5 %, vuoden 2009 väkiluku on $(100 - 4{,}5)\ \% = 95{,}5\ \%$ edellisen vuoden väkiluvusta eli 0,955-kertainen edellisen vuoden väkilukuun verrattuna.

Tällöin saadaan yhtälö

$$0{,}955x = 12500 \qquad \big| : 0{,}955$$
$$x = \frac{12500}{0{,}955} = 13089{,}005\ldots$$

prosenttikerroin · perusarvo = muuttunut arvo

**VASTAUS**

Vuonna 2008 asukkaita oli noin 13 100.

**ESIMERKKI 2**

Merivedestä voidaan valmistaa ruokasuolaa haihduttamalla vesi. Punaisenmeren rannalla sijaitseva laitos valmisti 1200 kg:n erän suolaa. Valmistus tapahtui altaassa, jonne laskettiin merivettä. Haihdutuksen jälkeen altaaseen jäi suolan lisäksi epäpuhtauksia 540 kg. Niiden osuus alkuperäisestä merivedestä oli 1,8 %. Määritä tietojen avulla Punaisenmeren suolapitoisuus.

**RATKAISU**

Perusarvo on altaaseen lasketun meriveden massa $x$. Vedessä on epäpuhtauksia toisaalta 1,8 % ja toisaalta 540 kg, joten

$$0{,}018x = 540 \qquad \big| : 0{,}018$$
$$x = 30000$$

Veden suolapitoisuus tarkoittaa suolan massan osuutta veden massasta.

Koska merivettä oli alussa 30 000 kg, meriveden suolapitoisuus on

$$\frac{1200\ \text{kg}}{30000\ \text{kg}} = 0{,}04 = 4\ \%$$

**VASTAUS**

Suolapitoisuus on 4 %.

**Prosenttikertoimen laskeminen**

1. Merkitään prosenttikerrointa kirjaimella $x$.
2. Jos perusarvoa ei tiedetä, merkitään sitä kirjaimella $a$.
3. Muodostetaan muuttunutta arvoa kuvaava lauseke perusarvon $a$ ja prosenttikertoimen avulla.
4. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan prosenttikerroin $x$.
5. Kertoimesta päätellään kysytty prosenttiluku.

ESIMERKKI 3

Eräässä urheiluvälineitä myyvässä liikkeessä työskentelevän myyjän kuukausipalkka oli 2300 euroa. Kahden vuoden jälkeen palkka nousi 2580 euroon.

a) Kuinka monta prosenttia palkka nousi?

b) Jos yhtä suuri palkankorotus olisi toteutettu kahdessa vaiheessa (vuoden välein) korottamalla palkkaa kummallakin kerralla yhtä monta prosenttia, kuinka monta prosenttia kertakorotus olisi ollut?

RATKAISU

a) **Tapa 1**

Merkitään korotusta kuvaavaa prosenttikerrointa kirjaimella $x$. Tällöin

$$2300x = 2580 \quad | : 2300$$
$$x = \frac{2580}{2300} = 1{,}1217\ldots$$

Korotus on siis
$1{,}1217\ldots - 1 = 0{,}1217\ldots$
$\approx 0{,}12 = 12\ \%$.

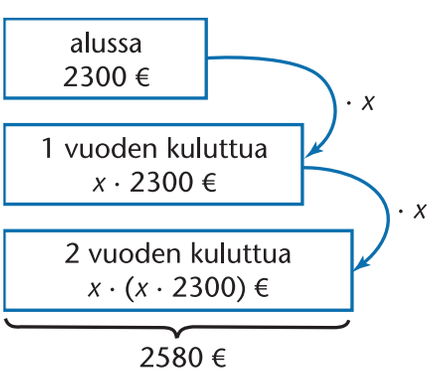
**Tapa 2**

Lasketaan ensin, kuinka paljon palkka nousi euroina.
$2580\ € - 2300\ € = 280\ €$

Korotus on alkuperäisestä palkasta

$$\frac{280\ €}{2300\ €} = 0{,}1217\ldots \approx 12\ \%$$

b) Jos palkka $x$-kertaistuu vuodessa, kahden vuoden kuluttua uusi palkka on $x \cdot (x \cdot 2300)$.




$$x \cdot (x \cdot 2300) = 2580$$
$$2300x^2 = 2580 \quad | : 2300$$
$$x^2 = \frac{2580}{2300}$$
$$x = \sqrt{\frac{2580}{2300}} = 1{,}05912\ldots$$

Kertakorotus on siis $1{,}05912\ldots - 1 = 0{,}05912\ldots \approx 0{,}059 = 5{,}9\ \%$.

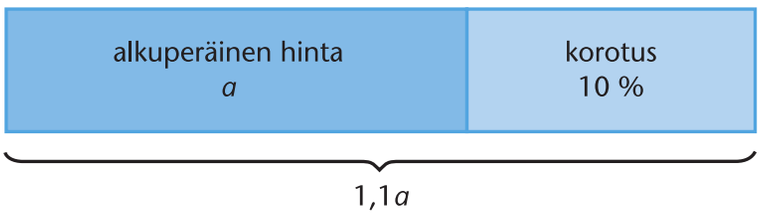
VASTAUS

a) 12 %

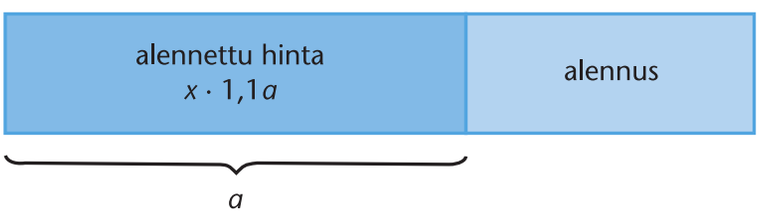
b) 5,9 %

**ESIMERKKI 4** Liikkeenharjoittaja nostaa tuotteen hintaa 10 %. Hän kuitenkin huomaa, että korotuksen jälkeen tuotetta myydään liian vähän. Kuinka monta prosenttia hintaa on laskettava, jotta hinta olisi sama kuin ennen korotusta?

**RATKAISU** Merkitään alkuperäistä hintaa kirjaimella $a$ ($a > 0$). Hinta korotuksen jälkeen on $1{,}1a$.




Hintaa lasketaan siten, että hinta alennuksen jälkeen on $x$-kertainen korotettuun hintaan nähden eli $x \cdot 1{,}1a$.




Koska hinnan halutaan olevan sama kuin ennen korotusta, saadaan yhtälö

$$x \cdot 1{,}1a = a \qquad | : 1{,}1a$$
$$x = \frac{a}{1{,}1a}$$
$$x = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}90909\ldots \approx 0{,}91\,\%$$

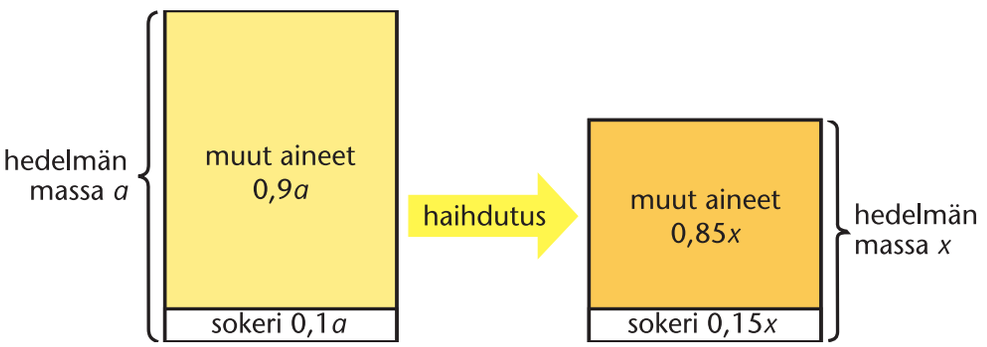
Hinnanalennus on siis $(100 - 91)\,\% = 9\,\%$.

**VASTAUS** Hintaa on alennettava 9 %.

**ESIMERKKI 5** Tuoreen hedelmän sokeripitoisuus oli 10 %. Hedelmää kuivatettiin haihduttamalla siitä vettä. Kuinka monta prosenttia hedelmän massasta täytyy haihduttaa, jotta sokeripitoisuus kohoaisi 15 prosenttiin?

**RATKAISU** Merkitään hedelmän alkuperäistä massaa kirjaimella $a$.
Sokeria on tällöin $0{,}1a$.

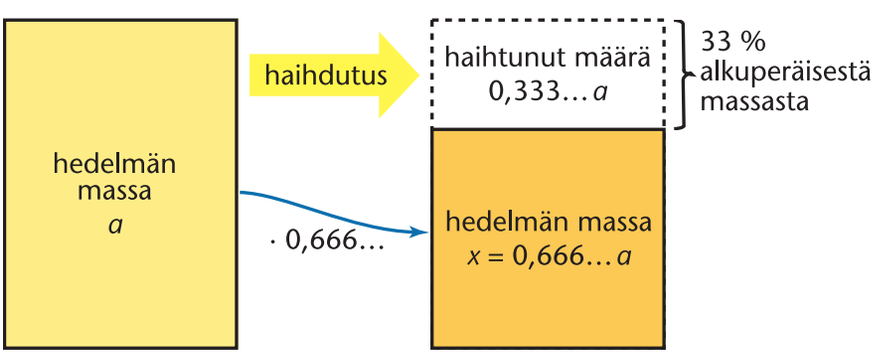
Merkitään kirjaimella $x$ hedelmän massaa haihdutuksen jälkeen.
Sokeria on tällöin $0{,}15x$.




Koska sokerin määrä ei muutu haihdutuksessa, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} 0{,}15x &= 0{,}1a \qquad \big| : 0{,}15 \\ x &= \frac{0{,}1a}{0{,}15} \\ x &= 0{,}666\ldots a \approx 0{,}67a \end{aligned}$$

Kuivuneen hedelmän massa on 0,67-kertainen tuoreen hedelmän massaan verrattuna, eli vettä on haihdutettava $a - 0{,}67a = 0{,}33a$, joka on 33 % hedelmän alkuperäisestä massasta.




**VASTAUS** Massasta on haihdutettava 33 %.

# Tehtäviä

**Perusarvon laskeminen**

324. Erästä lukua suurennetaan 15 %, jolloin saadaan luku 276. Mikä on kyseinen luku?

E1

325. Talvikauden aikana hylje menettää painostaan 45 %. Talven päättyessä hylje painoi 32 kg. Kuinka paljon hylje oli painanut edellisen kesän lopussa?

326. Auton nopeusmittarin näytti 18 % todellista ajonopeutta suurempaa lukemaa. Auton mittari näytti nopeutta 95 km/h. Mikä oli auton todellinen nopeus?

E2

327. Sokerijuurikkaassa on 18 % sokeria. Kuinka paljon sokerijuurikkaita tarvitaan valmistettaessa 10 tonnia sokeriliuosta, jonka sokeripitoisuus on 10 %? [S1993, 2b]

328. Kuinka monta grammaa sokeria on liuotettava 500 grammaan vettä, jotta saataisiin sokeriliuos, jonka pitoisuus massaprosentteina olisi 6 %?

329. Öljyntuottajamaiden järjestö OPEC nosti raakaöljyn hintaa. Tämä aiheutti 5,4 % hinnankorotuksen bensiinin hintaan. Vielä saman vuoden aikana toinen korotus nosti bensiinin hintaa 6,2 %, jolloin litrahinnaksi tuli 1,22 euroa. Mikä oli bensiinin hinta ennen korotuksia?

330. Erään luottokortin käyttöraja on 12 % henkilön vuoden bruttoansioista. Luottoa lyhennetään joka kuukausi summalla, joka on vähintään 2,5 % käyttörajasta. Jos henkilön pienin kuukausilyhennys on 150 euroa, mitkä ovat hänen vuotuiset bruttotulonsa?

331. Kauppias asettaa kirjan myyntihinnan lisäämällä kirjan tukkuhintaan 22 %. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 18,00 euroa, tukkuhintaa alennettiin 3,50 euroa. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta?

332. Vihtorin nettopalkka on 68 % bruttopalkasta. Vuokran ja 100 euron autolainan lyhennyksen jälkeen Vihtorille jää käteen 55 % nettopalkasta. Kuinka suuri on asunnon vuokra, kun bruttopalkka on 2500 euroa?

333. Vuonna 2002 kirjan myyntihinta saatiin lisäämällä kirjan perushintaan 8 % arvonlisävero. Kirjan, jonka myyntihinta oli ollut 22,30 euroa, perushintaa alennettiin 4,20 euroa. Mikä oli kirjan uusi myyntihinta?

334. Kauppias oli maksanut tuotteesta 125 euroa. Kuinka suureksi hänen olisi asetettava myyntihinta voidakseen myöntää käteisalennusta 12 % ja saada silti voittoa 20 % maksamastaan hinnasta?

335. Suolaliuoksen pitoisuus tilavuusprosentteina on 15 %. Kuinka suureksi tilavuudeksi 2,5 litraa tätä liuosta on laimennettava, jotta laimennetun liuoksen pitoisuus olisi 5 tilavuusprosenttia?

**Prosenttikertoimen laskeminen**

336. Kuinka monta prosenttia lukua 140 on suurennettava, jotta saataisiin luku 189?

337. Karkkipussi maksaa 1,20 euroa. Kuinka monta prosenttia hintaa on laskettava, jotta hinta olisi 0,85 euroa?

E3 338. Yrityksen kahden kuukauden sähkölasku on 3970 €. Yritys päättää pienentää energiankulutuksesta aiheutuvia kustannuksia. Kahden kuukauden kuluttua havaitaan, että säästötoimenpiteiden vuoksi uusi sähkölasku onkin 3150 €.

a) Kuinka monta prosenttia kahden kuukauden sähkönkulutus putosi?

b) Yritys oli asettanut kuukausikohtaisen tavoitteen energian säästämiseksi. Kuinka monta prosenttia tämä kuukausittainen säästötavoite oli?

339. Yritys kaksinkertaisti myyntinsä kahdessa vuodessa. Kuinka monta prosenttia vuosittainen kasvu oli, jos kasvuprosentti pysyi samana?

E4 340. Erään linja-autoreitin matkustajamäärä väheni 23 % vuoden aikana. Kuinka monta prosenttia matkustajamäärän pitäisi kasvaa, jotta päästäisiin takaisin entiseen määrään?

341. Lassi painaa 80 kg. Hänen painonsa nousi 8 kg. Kuinka monta prosenttia Lassi joutuu laihduttamaan, jos hän haluaa päästä takaisin entiseen painoonsa?

E5 342. Turpeessa on vettä 60 %. Kuinka monta prosenttia vedestä on haihdutettava, jotta turpeessa olisi tämän jälkeen vain 20 % vettä?

343. Elokuvateatterin kävijämäärä laski vuoden aikana 16 %. Kuinka monta prosenttia lipun hintaa pitäisi nostaa, jotta lipputulot säilyisivät samoina kuin aikaisemmin?

**Sekalaisia tehtäviä**

344. Palkansaajan pidätysprosentti oli 37 %. Kuinka paljon häneltä oli pidätetty ennakkoveroa, kun hän sai puhtaana käteen 1622 euroa?

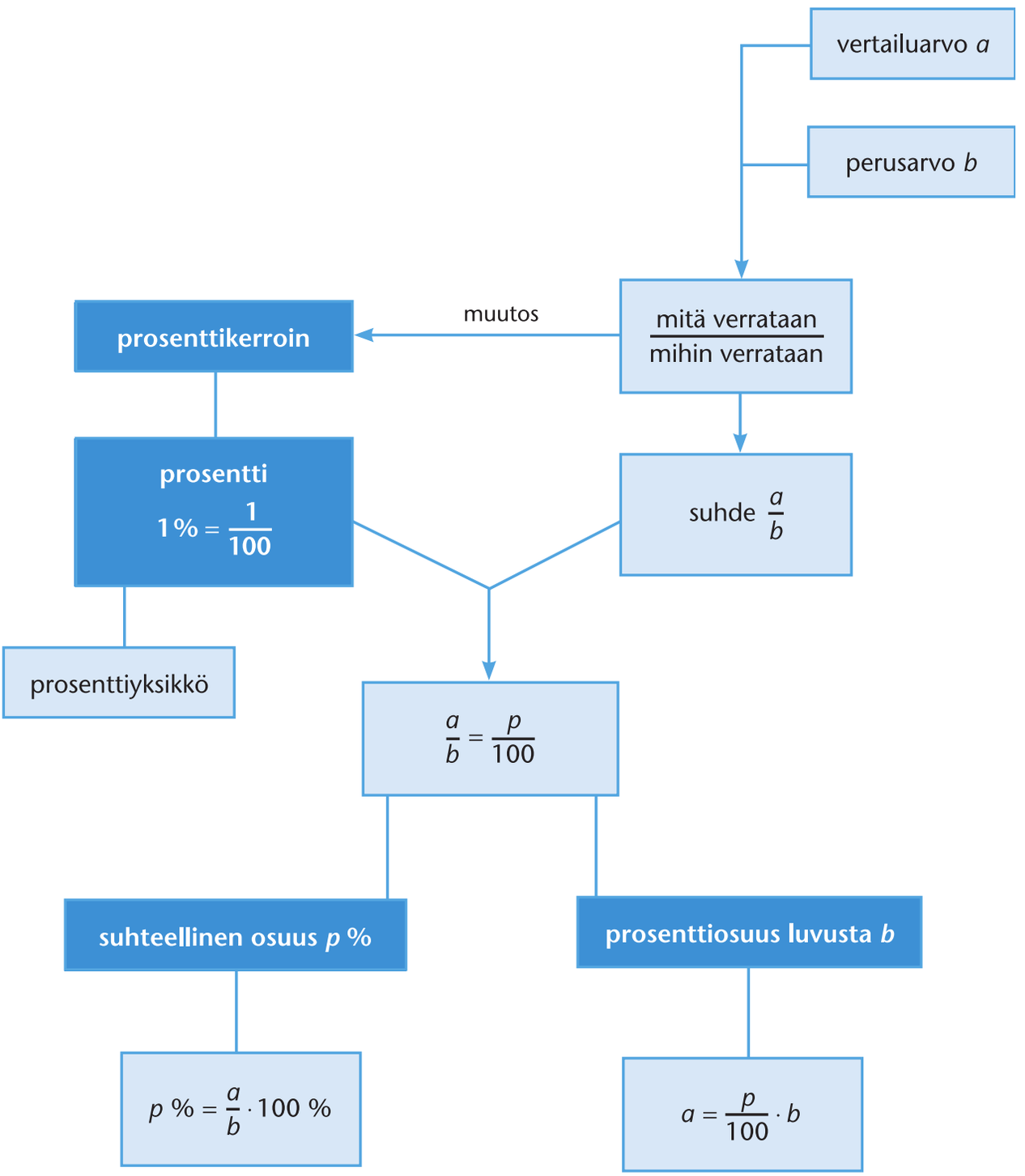
345. Matematiikan ylioppilaskokeessa Heikki sai 14 % enemmän pisteitä kuin Liisa. Liisa sai 20 % suuremman pistesaaliin kuin Maija. Kuinka monta pistettä saivat Liisa ja Maija, kun Heikin pisteet olivat 54?

346. Lainan määrä vähenee joka kuukausi 5 prosentilla. Roope lyhentää lainaa kolmena peräkkäisenä kuukautena 5 %, jonka jälkeen lainaa on jäljellä 8574 euroa. Kuinka paljon lainaa oli alun perin?

347. Kunnan asukasluku nousi 21 500 asukkaasta kahdessa vuodessa 25 300 asukkaaseen. Mikä oli vuosittainen asukasluvun kasvuprosentti, jos asukasluku kasvoi molempina vuosina yhtä monta prosenttia?

348. Bensiinin hinta nousi 7 %. Kuinka monta prosenttia hintaa on laskettava, jotta alennus alkuperäiseen hintaan verrattuna olisi 7 %?

# Keskeisiä käsitteitä



# 6 Kertausosa

## Lukujoukot ja laskutoimitukset

- **Vastaluku** saadaan muuttamalla luvun etumerkki vastakkaiseksi. Luvun $a$ vastaluku on $-a$.

  **Itseisarvo** kertoo luvun etäisyyden nollasta.

  $$|a| = \begin{cases} a, \text{ kun } a \geq 0 \\ -a, \text{ kun } a < 0 \end{cases}$$

- Murtoluvun **käänteisluku** muodostetaan vaihtamalla osoittajan ja nimittäjän paikat. Luvun $\frac{m}{n}$ käänteisluku on $\frac{n}{m}$.

- **Neliöjuuri** $\sqrt{a}$ on se ei-negatiivinen luku, jonka toinen potenssi on $a$.

1. Määritä
   a) luvun $-\frac{1}{4}$ käänteisluvun itseisarvo
   b) luvun $\frac{4}{5}$ käänteisluvun vastaluku.

2. Laske.
   a) $\left|-\sqrt{121}\right| - \left|2 - |-3|\right|$
   b) $2 \cdot \sqrt{100 - 36}$

3. Sievennä.
   a) $-2 - (-3 \cdot (-4) : 6)$
   b) $2 - \{3 - 4 : [6 - (-4 + 8)]\}$
   c) $-5 - (-10) : 2 - (+3) \cdot (-3)$

4. Käytä osittelulakia ja laske.
   a) $8 \cdot 655 + 8 \cdot 345$
   b) $3 \cdot 2345 - 3 \cdot 1245$

## Murtoluvuilla laskeminen

- **Yhteen- ja vähennyslasku**

  $$\frac{m}{n} \pm \frac{p}{n} = \frac{m \pm p}{n}$$

- **Kertolasku**

  $$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

- **Jakolasku**

  $$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$$

5. Laske.
   a) $\frac{1}{5} - \frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{7} : \frac{3}{14}$

6. Laske.
   a) $-\frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} + \frac{5}{12}$
   b) $1 + \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$
   c) $-\frac{3}{4} - \frac{5}{6} : \left(-\frac{6}{15}\right)$

7. Laske.
   a) $1\frac{7}{8} - 2 \cdot 1\frac{3}{4}$ b) $3\frac{3}{5} : \frac{9}{25}$

## Potenssien laskusäännöt

- **Samankantaiset potenssit**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

- **Tulon ja osamäärän potenssi**

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

- **Potenssin potenssi**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

- **Nollas potenssi**

$$a^0 = 1, \text{ kun } a \neq 0$$

- **Negatiivinen eksponentti**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ kun } a \neq 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

8. Sievennä lausekkeita potenssikaavojen avulla.

a) $x^4 \cdot x^8 \cdot x^5$ b) $(t^4)^5$

c) $\dfrac{x^{24}}{x^{19}}$ d) $(2x^3y^2)^4$

9. Sievennä ja laske lausekkeen arvo, kun $a = 4$.

a) $\dfrac{a^3 \cdot a^{-7}}{a^{-6}}$ b) $2a^{-3}$

10. Laske.

a) $-3 \cdot 2^0 + 3^{-1}$

b) $-1^{200} - (-1)^{400} - (-1)^{601}$

c) $\left(2\frac{2}{7}\right)^2$

11. Sievennä lauseke.

a) $10^{9500} \cdot 0{,}1^{9498}$ b) $\left(\dfrac{a^m \cdot a^{2m-1}}{a^{-3m-2}}\right) \cdot a^{1-5m}$

## Lauseke ja laskutoimitukset

- **Lauseke** on luku tai numeroiden ja kirjaimien avulla merkitty laskutoimitus.
- **Lausekkeen arvo** saadaan, kun muuttujalle annetaan jokin lukuarvo ja suoritetaan merkityt laskutoimitukset
- **Lausekkeiden yhteen- ja vähennyslaskussa** samanmuotoiset termit yhdistetään laskemalla termien kertoimet yhteen tai vähentämällä ne toisistaan.
- **Lauseke kerrotaan tai jaetaan luvulla** siten, että jokainen lausekkeen termi kerrotaan tai jaetaan luvulla erikseen.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

12. Laske lausekkeen $-x^2 - 3x + 10$ arvo, kun $x = -2$.

13. Sievennä lausekkeet.

a) $-4x^2 + 3x - (-9x + x^2)$

b) $5a - [-(2a - 4b) - (2 - 2b)]$

14. Määritä lausekkeiden $y^2 - 4y$ ja $3y - 2y^2$ summan ja erotuksen erotus. Merkitse yhtenä lausekkeena ja sievennä.

15. Laske.

a) $6(2x - 3)$

b) $-3(4 - 5x)$

c) $(4y - 7)(-2y)$

16. Suorita seuraavat jakolaskut.

a) $\dfrac{15x + 30}{5}$ b) $\dfrac{6x^2 - 12x - 18}{-6}$

## Polynomi

- **Polynomien yhteen- ja vähennyslaskussa** sovelletaan samoja laskusääntöjä kuin muidenkin lausekkeiden yhteen- ja vähennyslaskussa.
- **Kahden monomin kertolaskussa** termien kertoimet kerrotaan keskenään ja vastaavasti samankantaiset potenssit keskenään.
- **Monomin ja polynomin kertolaskussa** monomilla kerrotaan jokainen polynomin termi.
  $a(b+c) = ab + ac$
- **Kahden polynomin kertolaskussa** kaikki termit kerrotaan vuoron perään toisillaan.
  $(a+b)(c+d)$
  $= ac + ad + bc + bd$

17. Olkoon $P(x) = 4x - 7$ ja $Q(x) = 2 - 5x$. Laske.
    a) $P(x) - Q(x)$ b) $P(x) - P(x)Q(x)$

18. Sievennä lausekkeet.
    a) $5x(-3x^2 + 4x - 2)$
    b) $(5x - 2)(-2x + 4)$
    c) $(x^2 - 3x + 1)(6x + 2)$

19. $P(x) = x - 3$ ja $Q(x) = 1 - 5x$. Määritä.
    a) $P(x) \cdot Q(x)$
    b) $[P(x) + Q(x)] \cdot [P(x) - Q(x)]$

20. Sievennä lausekkeet.
    a) $-2x(x - 2) + (3 - x)(x - 1)$
    b) $(x - 2)^2$

21. Konditoria myy keskimäärin 23 täytekakkua päivässä, kun kakun hinta on 9 €. Jokainen 0,50 euron hinnannosto laskee kappalemääräistä myyntiä 2 kakulla. Muodosta lauseke, joka kuvaa päivän myyntiä euroina, kun kakun hinta muuttuu $x$ €. Laske lausekkeen avulla, mikä on päivän myynti euroina, kun hintaa
    a) nostetaan 4 € b) lasketaan 2,50 €.

## Murtolausekkeita

- **Murtolauseke** sisältää muuttujia myös nimittäjässä.
- **Murtolausekkeiden sieventämisessä** käytetään murtolukujen laskusääntöjä.
  – Vain samannimisiä lausekkeita voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan.
  – Kertolaskussa osoittajat ja nimittäjät kerrotaan keskenään.
  – Jakolasku muutetaan kertolaskuksi.
- Osittelulakia voidaan käyttää **yhteisen tekijän** erottamiseen.
  $ab + ac = a(b + c)$

22. Sievennä.
    a) $\frac{3x+6}{2x-1} - \frac{7-x}{2x-1}$ b) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x}$

23. Laske.
    a) $\frac{5x}{x+1} \cdot \frac{3}{10x}$ b) $\frac{2x+5}{3x} : \frac{2x-3}{6x}$

24. Kirjoita tulomuotoon.
    a) $24x^2 - 8x$ b) $-3ab^2 + 6a^2b$

25. Sievennä.
    a) $\frac{-4x^3 + 10x^2 + 8x}{-2x}$ b) $\frac{6x^2 - 3x}{4x - 2}$

## Ensimmäisen asteen yhtälö

- **Ensimmäisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$.

- **Yhtälöä ratkaistaessa** voidaan käyttää seuraavia keinoja:
  1. Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä tai molemmilta puolilta vähentää sama luku tai lauseke.
  2. Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla tai lausekkeella. Tämä luku ei kuitenkaan saa olla nolla.

- **Nimittäjien poistaminen**
  1. Kirjoitetaan kaikki termit nimittäjien kanssa.
  2. Lavennetaan samannimisiksi.
  3. Kerrotaan yhteisellä nimittäjällä.
  4. Sievennetään yhtälöä termejä siirtämällä ja yhdistämällä.
  5. Ratkaistaan $x$ jakamalla yhtälön molemmat puolet $x$:n kertoimella.

26. Ratkaise yhtälöt.

    a) $4x - 9 = 15 - 2x$

    b) $2 - (3x - 1) = -2(8x - 2)$

27. Ratkaise yhtälöt.

    a) $\frac{x+1}{2} - \frac{4-2x}{4} = 5x$

    b) $2 - \frac{2x}{3} = \frac{1}{5}$

28. Dieselauton A polttoaineen litrahinta on 0,95 euroa ja tavallisen bensiinikäyttöisen auton B polttoaineen litrahinta on 1,25 euroa. Dieselautoilija maksaa autosta A lisäksi vuotuisen dieselveron 420 euroa. Kuinka monta kilometriä on vuodessa autoiltava, jotta kannattaa ostaa auto A, kun

    a) molemmat autot kuluttavat 100 km matkalla 6,2 litraa polttoainetta?

    b) A kuluttaa 5,0 litraa ja B kuluttaa 6,0 litraa polttoainetta 100 km matkalla?

29. Kaupparatsu myy puhelimia. Hänen kuukausipalkkansa muodostuu perusosasta, jonka suuruus on 1200 euroa ja provisiosta. Provision suuruus on 20 % myytyjen puhelimien hinnasta. Yksi puhelin maksaa 140 euroa.

    a) Kirjoita lauseke, joka kuvaa kaupparatsun kuukausipalkkaa, kun hän myy kuukauden aikana $x$ puhelinta.

    b) Mikä on kuukausipalkka, kun hän myy 120 puhelinta?

    c) Kuinka monta puhelinta on myytävä, jotta kuukausiansiot olisivat vähintään 4000 euroa? Muodosta yhtälö.

30. Piippolan vaarilla on navetassaan kanoja ja sikoja. Yhteensä eläimiä on 26. Jalkoja niillä on yhteensä 82. Montako kanaa ja montako sikaa vaarilla siis on?

## Vaillinainen toisen asteen yhtälö

- **Toisen asteen yhtälö** $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.
- **Toisen asteen yhtälö** $\boldsymbol{x^2 + c = 0}$ voidaan ratkaista ottamalla neliöjuuri yhtälön molemmilta puolilta.

31. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 + 8x = 0$ b) $3x^2 = 4x$

32. Ratkaise yhtälöt.

a) $2x^2 = 50$ b) $3x^2 - 12 = 0$ c) $x^2 + 3 = 0$

33. $Q(x) = 2x - x^2$ ja $R(x) = 5x^2 + x$. Ratkaise yhtälö $Q(x) = R(x)$.

## Täydellinen toisen asteen yhtälö

- **Toisen asteen yhtälön** $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ ratkaisut saadaan ratkaisukaavalla

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

34. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 + 2x - 15 = 0$
b) $x^2 - 14x + 49 = 0$

35. Ratkaise yhtälöt.

a) $3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} = 0$
b) $-2x^2 + x - 16 = 0$

36. Ratkaise yhtälöt.

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
b) $4a^2 = 11a - 6$

37. Toisen asteen yhtälön $x^2 + ax - 6a = 0$ toisena ratkaisuna on $x = -6$. Määritä vakio $a$. Mikä on toinen ratkaisu?

38. Ratkaise yhtälö $P(x) = R(x)$, kun $P(x) = x^2 - 2x - 20$ ja $R(x) = 36 - x$.

## Toisen asteen yhtälön sovelluksia

- **Sovellustehtävän ratkaiseminen:**
  1. Piirrä kuva tilanteesta.
  2. Valitse muuttuja ja merkitse se kuvaan.
  3. Muodosta muuttujan avulla tehtävän tiedoista yhtälö.
  4. Mieti, mitä arvoja muuttuja voi saada.
  5. Ratkaise yhtälö.
  6. Tutki ratkaisujen järkevyyttä ja ilmoita vastaus.

39. Järven rannalla olevan kanakopin pinta-ala on 252 $m^2$. Kanakoppia ei ole aidattu rannan puoleiselta sivulta. Verkkoaidan pituus on 46 m. Laske kanakopin mitat.

40. Kahden peräkkäisen parillisen kokonaisluvun neliöiden summa on 164. Määritä kyseiset luvut.

41. Unitutkimuksessa havaittiin, että työtehon riippuvuutta yöunen määrästä voitiin likimain mallintaa 2. asteen polynomilla. Liian lyhyet tai liian pitkät unet heikensivät työtehoa. Jos yöunen pituus oli $x$ $(0 \le x \le 13)$ tuntia, tehollisten työtuntien määrää voitiin kuvata lausekkeella $-\frac{5}{64}x^2+\frac{5}{4}x+1$. Kuinka monen tunnin yöunet mallin mukaan tarvittaisiin, jotta tehollisia työtunteja olisi 6?

42. Jos neliön sivujen pituudet kasvavat kolmella, neliön pinta-ala nelinkertaistuu. Laske alkuperäisen ja suurennetun neliön alat.

## Suhde ja verranto

- **Suhteella** tarkoitetaan kahden luvun tai suureen osamäärää.

- **Verrantoyhtälö ratkaistaan ristiin kertomalla.**

  $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, josta saadaan

  $ad = bc.$

43. Ratkaise yhtälöt.

    a) $\frac{x}{2}=\frac{5}{6}$ b) $\frac{3+2x}{3}=\frac{5-4x}{2}$

44. Ratkaise yhtälöt.

    a) $\frac{3x}{5}=\frac{6}{5x}$ b) $\frac{x+1}{2}=\frac{x+1}{x-3}$

45. Suorakulmion sivujen suhde on 3:4. Laske suorakulmion sivujen pituudet, kun pinta-ala on 1200 aaria.

46. Eräässä kunnassa ruotsinkielisten ja suomenkielisten asukkaiden lukumäärien suhde on 4:5. Paikallisen koulun opiskelijoista 124 on ruotsinkielisiä. Kuinka monta suomenkielistä opiskelijaa koulussa voitaisiin olettaa olevan?

## Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet

- Kaksi suuretta ovat **suoraan verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen kasvaa samassa suhteessa.
- Kaksi suuretta ovat **kääntäen verrannolliset**, jos toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa.

47. Keskiverto 185 cm pitkä mieshenkilö painaa 84 kg. Jos pituus ja paino olisivat suoraan verrannollisia, kuinka paljon painaisi henkilö, jonka pituus on 175 cm?

48. Reetta nukkuu keskimäärin 7,5 tuntia yössä. Reetta on yllätyksekseen havainnut työtehonsa laskevan, jos tämä tuntimäärä jää vajaaksi. Hän on lisäksi todennut, että vajauksen määrä on suoraan verrannollinen työtehon laskuun. Jos 7,5 tunnista jää puuttumaan puoli tuntia, työteho laskee 15 %.
    a) Kuinka paljon univelkaa jää, jos seuraavan päivän työteho laskee 25 %?
    b) Kuinka paljon työteho laskee, jos Reetta nukkuu liiallisen juhlinnan seurauksena vain 5,5 tuntia?

49. Suure $b$ on suoraan verrannollinen suureen $a$ toiseen potenssiin. Suureen $b$ arvo muuttuu 100:sta 150:een. Kuinka monta prosenttia ja mihin suuntaan muuttuu suureen $a$ arvo?

## Prosenttilaskennan perustilanteita

- **Prosentin määritelmä**

  $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

- **Kuinka monta prosenttia luku $a$ on luvusta $b$?**

  $p\,\% = \frac{a}{b} \cdot 100\,\%$

- **Kuinka paljon on $p$ % luvusta $b$?**

  $a = \frac{p}{100} \cdot b$

- **Prosenttikertoimen** avulla voi tarkastella tilanteita, joissa perusarvolle ei ole annettu numeerista arvoa.
  - Kun perusarvo arvo kasvaa $p$ %, prosenttikerroin on $100\,\% + p\,\%$.
  - Kun perusarvo pienenee $p$ %, prosenttikerroin on $100\,\% - p\,\%$.

50. Laske,
    a) 45 % luvusta 780
    b) kuinka monta prosenttia 24 on luvusta 68
    c) kuinka monta prosenttia 78 on suurempi kuin 55.

51. Leikkelemakkaran suolapitoisuutta alennettiin 3,4 prosentista 2,8 prosenttiin.
    a) Kuinka monta prosenttiyksikköä suolapitoisuus laski?
    b) Kuinka monta prosenttia suolapitoisuus laski?

52. Mesimarjalikööripullon tilavuus oli 500 ml. Liköörin alkoholipitoisuus oli 22 tilavuusprosenttia. Kuinka paljon pullossa oli absoluuttista alkoholia?

53. Puhelinyhtiö alensi minuuttihintaansa 11 sentistä 9,4 senttiin. Kuinka monta prosenttia hinta aleni?

54. Pilli ja Pulla ostivat yhdessä osakkeita. Pilli sijoitti yhteiseen salkkuun 1500 euroa. Pulla sijoitti rahojaan 15 % enemmän kuin Pilli. Minkä verran he yhteensä sijoittivat rahaa?

55. Aikakauslehden hinta nousee 8,5 %, jolloin lehden levikki laskee 12 %. Miten ja mihin suuntaan muuttuu julkaisijan lehdestä saama tuotto?

## Prosenttiyhtälöitä

- **Perusarvon laskeminen**
  1. Merkitään perusarvoa muuttujalla $x$.
  2. Muodostetaan muuttunutta arvoa kuvaava lauseke perusarvon $x$ ja prosenttikertoimen avulla.
  3. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä perusarvo $x$.

- **Prosenttikertoimen laskeminen**
  1. Merkitään prosenttikerrointa kirjaimella $x$.
  2. Jos perusarvoa ei tiedetä, merkitään sitä kirjaimella $a$.
  3. Muodostetaan muuttunutta arvoa kuvaava lauseke perusarvon $a$ ja prosenttikertoimen avulla.
  4. Muodostetaan yhtälö.
  5. Ratkaistaan prosenttikerroin $x$.
  6. Kertoimesta päätellään kysytty prosenttiluku.

56. Yritys saneeraa, jonka seurauksena 15 % työntekijöistä irtisanotaan. Yritykseen jää edelleen 120 työntekijää. Kuinka monta irtisanottiin?

57. Lukua $a$ suurennetaan 14 %. Saatua lukua pienennetään 14 %, jolloin päädytään lukuun 200. Mikä oli luku $a$?

58. Kilpahiihtäjän hemoglobiini ennen harjoitusleiriä oli 158. Vuoristossa tapahtuneen harjoittelun aikana hemoglobiiniarvo kohosi 5,5 %. Kilpailuissa hemoglobiinin ylärajaksi oli asetettu 160. Kuinka monta prosenttia urheilijan arvon täytyy kohonneesta arvosta laskea, jotta hän voisi osallistua kilpailuihin?

59. Vilma keinottelee pörssissä. Hän ostaa erään IT-yhtiön osakkeita. Osakkeiden arvo nousee ensimmäisellä vuosineljänneksellä 9,8 %. Toisella neljänneksellä kurssi putoaa rajusti, 18 %, jolloin Vilma hätääntyy ja myy kaikki omistamansa osakkeet. Hänen kokonaistappionsa keinottelussa oli 370 euroa. Kuinka suuren summan Vilma alun perin sijoitti?

# 1. Harjoituskoe

1. Laske. Merkitse välivaiheet näkyviin.

   a) $5\frac{1}{6}-\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ b) $3-\frac{4}{3}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}$ c) $3+\frac{4}{3}:\frac{1}{5}$

2. Sievennä.

   a) $\dfrac{a^5 10^{28}}{a^4 10^{29}}$ b) $(2k^4)^3\cdot k^6$ c) $\left(\dfrac{x^2x^3}{x^7}\right)^{-2}$

3. Olkoot $P(x) = x^2 - 6x + 7$ ja $Q(x) = -2x^2 + 11x + 4$. Määritä.

   a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$

4. Ratkaise yhtälöt.

   a) $2x^2 - 8 = 0$ b) $2x^2 - 8x = 0$ c) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{4}{x+1}$

5. Helsinkiläisen kaksion keskimääräinen neliöhinta Kaivopuistossa oli 3400 €, kun vastaavan asunnon hinta Kalliossa oli 2300 €.

   a) Kuinka monta prosenttia kalliimpia kaksiot olivat Kaivopuistossa kuin Kalliossa?
   b) Kuinka monta prosenttia halvempia kaksioiden hinnat olivat Kalliossa Kaivopuiston hintoihin verrattuna?

6. Uhkapeluri sijoittaa ravivetoon vedonlyöntisuhteen ollessa 1:30.

   a) Kuinka paljon uhkapeluri voittaessaan saa, jos hän sijoittaa 85 €?
   b) Kuinka paljon pelurin pitää sijoittaa, jotta hän voittaessaan saisi 336 €?

7. Kun matkapuhelimia myyvä liike tarjosi uusinta malliaan alennushintaan 302 €, puhelimia myytiin viikossa 450 kpl. Jokaista yhden euron hinnan korotusta kohden puhelinten viikkomyynti putosi neljällä kappaleella. Muodosta lauseke, joka kuvaa viikon myyntituloa, kun puhelimen hinta muuttuu $x$ euroa. Voiko liike myydä puhelinta hintaan 522 €?

8. Pysäköintialueella on polkupyöriä ja autoja. Autoja on kaksinkertainen määrä. Paljonko polkupyöriä on, kun renkaita on yhteensä 120 kappaletta?

# 2. Harjoituskoe

1. Sievennä.

   a) $a^4 \cdot a^3 \cdot a$ b) $\frac{b^8}{b^5}$ c) $\left(\frac{1}{c}\right)^{-3}$

   d) $d^0$ e) $(-5e)^3$ f) $\left(-\frac{3f^3}{2}\right)^4$

2. Laske. Merkitse välivaiheet näkyviin.

   a) $5\frac{1}{3} - 2\frac{2}{3}$ b) $\frac{100}{5} + \frac{3}{100}$ c) $2 - 2\frac{4}{8} + \frac{5}{4}$ d) $3 \cdot \frac{4}{3} \cdot 2 : \frac{3}{4}$

3. Laske.

   a) $\frac{2}{x-3} + \frac{x-4}{x-3}$ b) $\frac{(x-5)(x+5)}{x^2-25}$ c) $\frac{2x-4}{x} : \frac{3x-6}{2x}$

4. Ratkaise yhtälöt, kun $P(x) = 2x^2 + 1$, $Q(x) = x + 1$ ja $R(x) = x - 1$.

   a) $P(x) + R(x) = 0$ b) $P(x) - Q(x) = 0$ c) $R(x) \cdot Q(x) = 0$

5. Ratkaise yhtälöt.

   a) $(5x - 2) - (7x - 5) = -4(2x - 1)$
   b) $2(x - 4) + x = 3(x + 5)$
   c) $\frac{1}{2}x - 1 = \frac{3x-6}{6}$

6. Ratkaise yhtälöt.

   a) $-3x^2 + 12 = 0$ b) $2(x^2 + 2x) = x$ c) $3x^2 - 3x - 36 = 0$

7. Mieti, kummasta verrannollisuudesta on seuraavissa tilanteissa kyse. Ratkaise tehtävät.
   a) 800 gramman oliivipurkki maksaa 2,90 €. Kuinka paljon maksaa 150 g oliiveja?
   b) Kolmihenkinen perhe arvioi tekevänsä puutarhatyöt 8 tunnissa. Kuinka kauan aikaa kuluu, jos töihin saadaan kaksi lisähenkilöä? Oletetaan kaikkien työteho samaksi.

8. Tuotteen myyntihinta laski ensin 8 % ja nousi tämän jälkeen 15 %.
   a) Kuinka monta prosenttia myyntihinta muuttui kaiken kaikkiaan?
   b) Mikä oli tuotteen alkuperäinen hinta, kun hinta kahden muutoksen jälkeen oli 25,50 €?

# 3. Harjoituskoe

1. Sievennä.
   a) $(3k)(3k)(3k)$ b) $(-2a)^3$ c) $(5x^6)^3$
   d) $\dfrac{a^3a^5}{a^0}$ e) $\left(\dfrac{x^{-3}}{x^{-4}}\right)^5$ f) $\left(\dfrac{2^3x^{-1}}{2^2}\right)^{-2}$

2. Auton vuokraus maksaa 52 € päivältä. Lisäksi jokaiselta ajetulta kilometriltä veloitetaan 0,2 €.
   a) Muodosta polynomi, joka kuvaa auton vuokraushinnan riippuvuutta ajetuista kilometreistä, kun auto vuokrataan yhdeksi päiväksi.
   b) Kuinka paljon vuokraus päiväksi maksaa, jos päivän aikana ajetaan 350 km?

3. Ratkaise yhtälöt.
   a) $5x^2 - x = 0$ b) $0{,}5y - 0{,}2y^2 = 0{,}2$ c) $\dfrac{1}{3}x + 4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x$

4. a) Yksiön vuokra nousi 420 eurosta 450 euroon. Kuinka suuri korotus oli prosentteina?
   b) Maikin pituus on 95 % Mintun pituudesta. Kuinka pitkä Minttu on, kun Maikin pituus on 166 cm?

5. Kaasun paine vakiolämpötilassa on kääntäen verrannollinen kaasun tilavuuteen. Kaasun paine on 302 kPa, kun sen tilavuus on 3,6 $\text{dm}^3$. Mikä on kaasun paine samassa lämpötilassa, kun tilavuus on 5,6 $\text{dm}^3$?

6. Tuotteen hinta nousee 18 %. Kuinka monta prosenttia hintaa on laskettava, jotta se olisi sama kuin alkuperäinen hinta?

7. Nakkikioskin ympärille hiekoitetaan käytävä, joka on joka puolelta yhtä leveä. Kuinka leveä käytävästä tulisi tehdä, kun nakkikioskin mitat ovat 2,0 m × 3,0 m ja hiekoittamiseen tarkoitettua hiekkaa riittää 18,0 $\text{m}^2$ alueelle?

8. Tuotetta myydään hinnalla $x$, ja tuotteen kysyntä riippuu hinnasta lausekkeen $4x - 5$ mukaisesti. Millä hinnalla tuotteen myyntitulot ovat 148,50 €?

# 7 Ekstrat

## Murtolukuja laskimella

Laskettaessa murtolukulaskuja laskimella voidaan käyttää murtolukunäppäintä [a b/c].

| Lasku | Näppäily laskimeen | Vastaus |
|---|---|---|
| $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ | 2 [a b/c] 3 + 4 [a b/c] 5 = | $1\frac{7}{15}$ |
| $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ | 3 [a b/c] 2 [a b/c] 7 – 1 [a b/c] 1 [a b/c] 5 = | $2\frac{3}{35}$ |
| $-4\frac{6}{7}:\frac{5}{3}$ | (–) 4 [a b/c] 6 [a b/c] 7 ÷ 5 [a b/c] 3 = | $-2\frac{32}{35}$ |

Joissain laskimissa on kirjoitettava lisäksi sulut murtolukujen ympärille, jotta oikea laskujärjestys toteutuisi. Oman laskimen laskutoimitusten syöttämisjärjestys kannattaa aina tarkistaa.

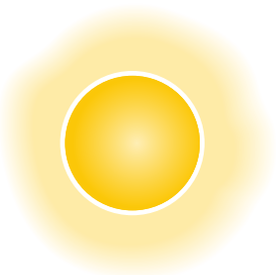
Niissä graafisissa laskimissa, joissa ei ole murtolukunäppäintä, murtoluvut syötetään jakomerkin avulla ja tulos muutetaan murtoluvuksi Frac-toiminnolla.

Laske seuraavat laskut laskimella.

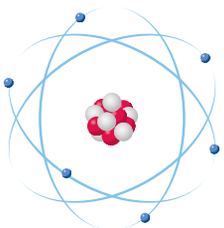
| Lasku | Vastaus |
|---|---|
| 1. $\frac{7}{9}-\frac{1}{5}$ | $\frac{26}{45}$ |
| 2. $2\frac{3}{7}+\frac{4}{5}$ | $3\frac{8}{35}$ |
| 3. $-6\frac{3}{11}-2\frac{1}{6}$ | $-8\frac{29}{66}$ |
| 4. $\frac{3}{5}\cdot 1\frac{2}{13}$ | $\frac{9}{13}$ |
| 5. $-7\frac{5}{6}:\ -3\frac{1}{2}$ | $2\frac{5}{21}$ |
| 6. $-2\frac{1}{3}+\frac{4}{5}-\ -\frac{5}{4}$ | $-\frac{17}{60}$ |
| 7. $\frac{11}{13}:3\frac{2}{3}\cdot\ -\frac{4}{5}$ | $-\frac{12}{65}$ |

# Kymmenen potenssit

Kymmenpotenssimuoto on käytännöllinen erittäin suurien tai erittäin pienien lukujen esittämisessä. Esimerkiksi luku 31 000 000 000 000 000 kannattaa kirjoittaa lukujen 3,1 ja $10^{16}$ tulona eli $3{,}1 \cdot 10^{16}$.



Auringon säde on noin
$6{,}960 \cdot 10^8$ m = 696 000 000 m.



Atomin halkaisija on noin
$1 \cdot 10^{-10}$ m = 0,000 000 000 1 m.

Luvun **kymmenpotenssimuoto** on yhteisesti sovittu merkintätapa. Se on tulo, jonka ensimmäisen tekijän itseisarvo on yhden ja kymmenen välillä. Tulon toinen tekijä on kymmenen potenssi.

**Luvun kymmenpotenssimuoto**

$a \cdot 10^n$, jossa $1 \leq |a| < 10$ ja $n$ on kokonaisluku

Laskin näyttää rajallisen määrän numeroita, joten hyvin suurten tai hyvin pienten lukujen yhteydessä käytetään kymmenen potensseja lyhentämään luvun merkitsemistä. Jos kymmenpotenssimuodossa olevaa lukua joudutaan pyöristämään, ainoastaan kerrointa pyöristetään.

ESIMERKKI 1 Kirjoita luku ilman potenssimerkintää.

a) $3 \cdot 10^3$ b) $7{,}2 \cdot 10^4$ c) $-4{,}50 \cdot 10^{-6}$

RATKAISU

a) $3 \cdot 10^3 = 3 \cdot 1000 = 3000$

b) $7{,}2 \cdot 10^4 = 7{,}2 \cdot 10\,000 = 72\,000$

c) $-4{,}50 \cdot 10^{-6} = \dfrac{-4{,}50}{10^6} = \dfrac{-4{,}50}{1000000} = -0{,}00000450$

VASTAUS a) 3000 b) 72 000 c) −0,000 004 5

**Esimerkki 2** Muuta luku kymmenpotenssimuotoon ja anna vastaus kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.

a) 0,739 b) 767 000 000 c) −0,000 507 98

**Ratkaisu**

a) $0{,}739 = 7{,}39 \cdot 10^{-1} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-1}$

b) $767\,000\,000 = 7{,}67 \cdot 10^{8} \approx 7{,}7 \cdot 10^{8}$

Ensimmäinen tulon tekijä on itseisarvoltaan yhden ja kymmenen välillä.

c) $-0{,}00050798 = -5{,}0798 \cdot 10^{-4} \approx -5{,}1 \cdot 10^{-4}$

**Vastaus** a) $7{,}4 \cdot 10^{-1}$ b) $7{,}7 \cdot 10^{8}$ c) $-5{,}1 \cdot 10^{-4}$.

## Etuliitteet

Monet suureet, kuten pituus, pinta-ala, massa, tilavuus, aika ja nopeus, ilmaistaan lukuarvon ja yksikön tulona, esimerkiksi 3,5 kg.

Jotta suureet voitaisiin esittää tarkoituksenmukaisina lukuarvoina, on otettu käyttöön kymmenen potenssia vastaavia etuliitteitä. Esimerkiksi 300 km on paljon kuvaavampi suure kuin 300 000 m. Tässä metrin edessä lyhenne k viittaa kiloon, joka tarkoittaa kertomista luvulla 1000. Alle olevassa taulukossa on esitetty etuliitteitä ja niiden merkityksiä.

| Etuliite | Lyhenne | 10:n potenssi |
|---|---|---|
| peta | P | $10^{15}$ |
| tera | T | $10^{12}$ |
| giga | G | $10^{9}$ |
| mega | M | $10^{6}$ |
| **kilo** | **k** | $\mathbf{10^{3}}$ |
| **hehto** | **h** | $\mathbf{10^{2}}$ |
| **deka** | **da** | $\mathbf{10^{1}}$ |
| **–** | **–** | $\mathbf{10^{0}}$ |
| **desi** | **d** | $\mathbf{10^{-1}}$ |
| **sentti** | **c** | $\mathbf{10^{-2}}$ |
| **milli** | **m** | $\mathbf{10^{-3}}$ |
| mikro | μ | $10^{-6}$ |
| nano | n | $10^{-9}$ |
| piko | p | $10^{-12}$ |
| femto | f | $10^{-15}$ |

**Esimerkki 3**

Tutkimusmatkailijat kuluttivat vaelluksella etelämantereen poikki jopa 40 MJ (megajoulea) energiaa vuorokaudessa fyysisen rasituksen ja kylmyyden takia. 100 g voita sisältää energiaa 3000 kJ. Jos retkikunnan jäsenet olisivat tyydyttäneet energiantarpeensa vain syömällä voita, kuinka paljon heidän olisi pitänyt syödä sitä vuorokaudessa?

**Ratkaisu**

40 MJ on $40 \cdot 10^6$ joulea. 3000 kJ on $3000 \cdot 10^3$ joulea.
100 gramman pakkauksia pitäisi syödä

$$\frac{40 \cdot 10^6 \text{ J}}{3000 \cdot 10^3 \text{ J}} = 13{,}333\ldots$$

$$13{,}333\ldots \cdot 100 \text{ g} = 1333{,}33\ldots \text{ g} \approx 1{,}3 \text{ kg}$$

**Vastaus**

Voita pitäisi syödä 1,3 kg vuorokaudessa.

**Esimerkki 4**

197 grammaa kultaa sisältää $6{,}022 \cdot 10^{23}$ kulta-atomia.

a) Kuinka monta kulta-atomia on sormuksessa, jonka massa on 4,8 g?

b) Kuinka monta femtogrammaa painaa 1500 kulta-atomia?

**Ratkaisu**

a) Yhdessä grammassa kultaa on $\frac{6{,}022 \cdot 10^{23}}{197} = 3{,}056\ldots \cdot 10^{21}$ atomia.

Sormuksessa on siis
$4{,}8 \cdot (3{,}056\ldots \cdot 10^{21}) = 1{,}467\ldots \cdot 10^{22} \approx 1{,}47 \cdot 10^{22}$ kulta-atomia.

b) Yksi kulta-atomi painaa $\frac{197 \text{ g}}{6{,}022 \cdot 10^{23}} = 3{,}2713\ldots \cdot 10^{-22}$ g.

1500 kulta-atomia painaa siis
$1500 \cdot (3{,}2713\ldots \cdot 10^{-22} \text{ g}) = 4{,}90700\ldots \cdot 10^{-19}$ g.

Koska 1 fg $= 10^{-15}$ g, atomien massa femtogrammoina on

$$\frac{4{,}90700\ldots \cdot 10^{-19}}{10^{-15}} \text{ fg} = 4{,}90700\ldots \cdot 10^{-4} \text{ fg} \approx 4{,}91 \cdot 10^{-4} \text{ fg}.$$

**Vastaus**

a) Sormuksessa on $1{,}47 \cdot 10^{22}$ kulta-atomia.

b) 1500 kulta-atomia painaa $4{,}91 \cdot 10^{-4}$ fg.

# Tehtäviä

**Kymmenen potenssit**

1. Aseta luvut suuruusjärjestykseen suurimmasta pienimpään.

   a) $5{,}4 \cdot 10^{-4}$ b) $5{,}1 \cdot 10^{-4}$
   c) 0,0006 d) 0,00515

2. Kirjoita luku ilman potenssimerkintää.

   a) $1{,}2 \cdot 10^{2}$ b) $-1{,}2 \cdot 10^{5}$
   c) $1{,}2 \cdot 10^{-1}$ d) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$

3. Kirjoita luku kymmenpotenssimuotoon.

   a) 7 065 000 000 b) 0,000 012 c) −0,000 706 5

4. Sievennä lauseketta potenssien laskusäännöillä.

   a) $10^{15} \cdot 10^{15}$ b) $\dfrac{10^{-80}}{10^{13}}$

   c) $(10^{23})^2$ d) $\dfrac{15 \cdot (10^{10})^7}{5 \cdot (10^{5})^2}$

5. Polioviruksen pituus on $3{,}0 \cdot 10^{-8}$ m. Kuinka moninkertainen on 180 senttimetrisen henkilön pituus polioviruksen pituuteen verrattuna?

**Etuliitteet**

6. Kirjoita käyttämällä etuliitettä.

   a) $4 \cdot 10^{-9}$ m b) $7{,}6 \cdot 10^{6}$ J c) $3 \cdot 10^{8}$ s
   d) 0,002 s e) 45 000 g f) 0,000 006 4 m

7. Mooli on ainemäärän SI-yksikkö. Yksi mooli ainetta tarkoittaa Avogadron luvun ($6{,}022 \cdot 10^{23}$ kpl) verran perusosasia, esimerkiksi atomeja. Yksi mooli hiiltä painaa noin 12 grammaa.
   a) Kuinka paljon painaa yksi hiiliatomi grammoina?
   b) Kuinka monta atomia on yhdessä hiilikilossa?

8. a) Suomen valtion budjetti on useita vuosia ollut noin 33 miljardia euroa. Jos tämä rahasumma jaettaisiin tasan kaikille suomalaisille, kuinka paljon kukin saisi? Suomen väkiluku on noin viisi miljoonaa.
   b) Minä vuonna täyttää 1983 syntynyt henkilö yhden gigasekunnin (= $10^{9}$ sekuntia)? Laskuissa ei tarvitse ottaa huomioon karkausvuosia. [mukailtu K2002, 3]

# Muistikaavat

Muistikaavoja voidaan käyttää binomin neliöiden sieventämisessä.

- Sievennetään binomin $a + b$ neliö.

  $(a+b)^2 = (a+b)(\,a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

  Lausekkeen $(x+5)^2$ sieventämisessä voidaan soveltaa kaavaa $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Merkitään $a = x$ ja $b = 5$.
  Tällöin $(x+5)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$.

- Sievennetään binomin $a - b$ neliö.

  $(a-b)^2 = (a-b)(\,a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

  Tällöin $(x-5)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$.

**Muistikaavat**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Täydennä taulukosta puuttuvat kohdat.

| Lauseke | $a$ | $b$ | Sievennetty lauseke |
|---|---|---|---|
| $(x+3)^2$ | $x$ | 3 | $x^2 + 6x + 9$ |
| $(x-2)^2$ | | | |
| $(3x-1)^2$ | $3x$ | 1 | $9x^2 - 6x + 1$ |
| $(6x-2)^2$ | | | |
| $\left(\frac{1}{3}x - 3\right)^2$ | | | |
| | | | $x^2 + 2x + 1$ |
| | | | $x^2 - 8x + 16$ |
| | | | $4x^2 + 8x + 4$ |
| $(x^2-3)^2$ | | | |
| $(x^2-2x)^2$ | | | |

# Polynomifunktio

**Ensimmäisen asteen polynomifunktio**

Ensimmäisen asteen polynomi sisältää ensimmäisen asteen termin ja vakiotermin, joka voi olla myös nolla. Esimerkiksi $3x - 2$ on ensimmäisen asteen polynomi. Olkoon polynomin nimi $P$, jolloin voidaan merkitä $P(x) = 3x - 2$.

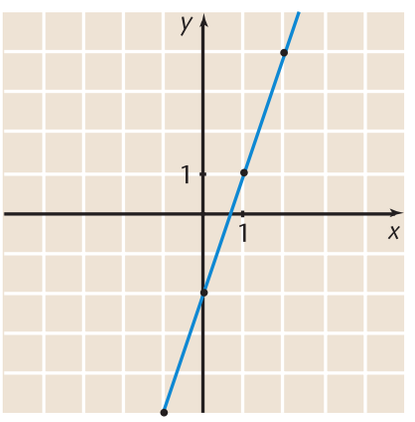
Lasketaan polynomin arvoja sijoittamalla eri lukuja muuttujan $x$ paikalle:

$$P(0) = 3 \cdot 0 - 2 = -2$$
$$P(1) = 3 \cdot 1 - 2 = 1$$
$$P(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$$
$$P(-1) = 3 \cdot (-1) - 2 = -5$$

Polynomin arvo riippuu muuttujan $x$ arvosta. Sanotaan, että polynomin arvo on muuttujan $x$ funktio.

Riippuvuutta voidaan havainnollistaa koordinaatistossa kuvaajalla. Sovitaan, että polynomin arvo vastaa pisteen $y$-koordinaattia ja muuttujan arvo pisteen $x$-koordinaattia. Näin saadaan pistejoukko $(0, -2)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ ja $(-1, -5)$. Merkitään pisteet koordinaatistoon ja piirretään pisteiden kautta kulkeva käyrä.

Pisteiden kautta kulkeva käyrä on suora. Sanotaan, että muuttujien välinen riippuvuus on lineaarista. Polynomifunktio $P(x) = 3x - 2$ on esimerkki ensimmäisen asteen polynomifunktiosta. Ensimmäisen asteen polynomifunktiota sanotaan myös lineaariseksi funktioksi.




Koska kaikissa ensimmäisen asteen polynomifunktion lausekkeessa on vain ensimmäisen asteen termi ja vakiotermi, ne ovat muotoa $ax + b$, missä $a \neq 0$ ja $b$ on reaaliluku.

**Ensimmäisen asteen polynomifunktion lauseke** on muotoa $P(x) = ax + b$, jossa $a \neq 0$ ja $b$ on reaaliluku. Funktion kuvaaja on suora.

**ESIMERKKI 1**

Biologit tutkivat hyötypuulajien menestymistä eri ilmastovyöhykkeillä. He havaitsivat, että vuotuisen pituuskasvun ja keskimääräisen valoisien tuntien määrän välillä vallitsi lineaarinen riippuvuus. Jos valoisia tunteja oli $x$, pituuskasvua senttimetreinä voitiin mallintaa funktiolla $P(x) = 3{,}5x - 12$. Piirrä funktion kuvaaja ja selvitä sen avulla,

a) kuinka monta senttimetriä puu kasvoi, jos vuorokaudessa oli valoisia tunteja keskimäärin 6
b) kuinka monta valoisaa tuntia 10 cm:n pituuskasvu vaati
c) milloin pituuskasvu pysähtyi kokonaan.

**RATKAISU**

Lasketaan taulukkoon muutamia pisteitä kuvaajan piirtämistä varten.

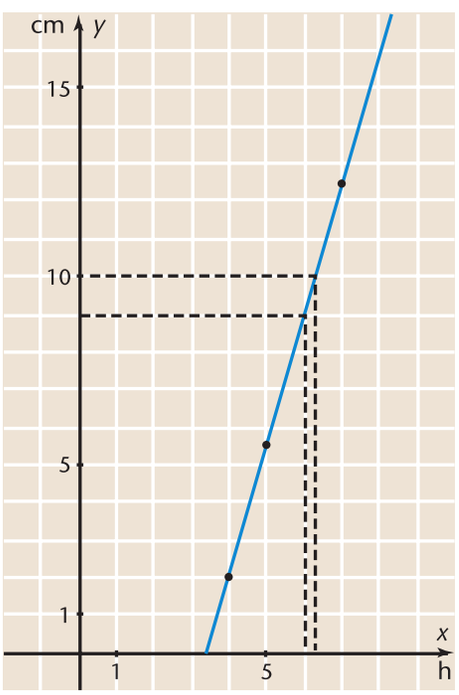
| $x$ | $P(x) = 3{,}5x - 12$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 4 | $P(4) = 3{,}5 \cdot 4 - 12 = 2$ | (4, 2) |
| 5 | $P(5) = 3{,}5 \cdot 5 - 12 = 5{,}5$ | (5; 5,5) |
| 7 | $P(7) = 3{,}5 \cdot 7 - 12 = 12{,}5$ | (7; 12,5) |

Koordinaatit erotetaan toisistaan puolipisteellä, jos jompikumpi niistä on desimaaliluku.

a) Jos valoisia tunteja on 6, kuvaajalta etsitään kohta, jossa $x$ saa arvon 6 ja luetaan pituuskasvu tässä kohdassa $y$-akselilta. Pituuskasvu on 9,0 cm.

b) 10 cm:n pituuskasvua vastaa $x$:n arvo 6,3 eli pituuskasvu vaatii valoisia tunteja 6 h 20 min.

c) Pituuskasvun ollessa nolla $y$ saa arvon 0 eli se on kohta, jossa suora leikkaa $x$-akselin. Tällöin $x = 3{,}5$ eli valoisia tunteja on keskimäärin vain 3 h 30 min.



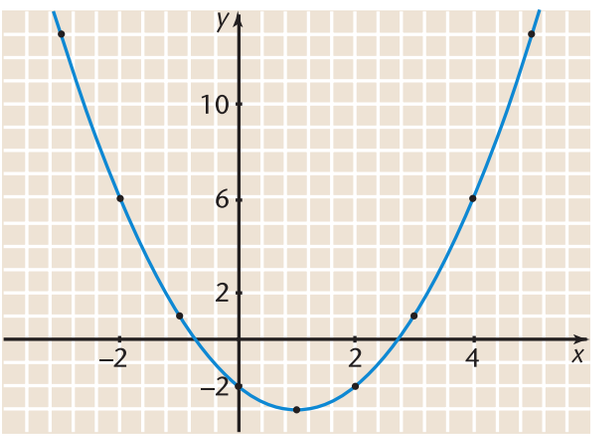

**VASTAUS** a) 9,0 cm b) 6 h 20 min c) 3 h 30 min

## Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomissa, esimerkiksi polynomissa $x^2 - 2x - 2$, termin korkein asteluku on 2. Olkoon polynomin nimi $R$ eli $R(x) = x^2 - 2x - 2$.

Havainnollistetaan polynomifunktiota graafisesti. Lasketaan tätä varten polynomin arvoja sijoittamalla muuttujan $x$ paikalle joitakin lukuja.

| $x$ | $R(x) = x^2 - 2x - 2$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $0^2 - 2 \cdot 0 - 2 = -2$ | (0, –2) |
| 1 | $1^2 - 2 \cdot 1 - 2 = -3$ | (1, –3) |
| 2 | $2^2 - 2 \cdot 2 - 2 = -2$ | (2, –2) |
| –2 | $(-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2 = 6$ | (–2, 6) |
| –1 | $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 2 = 1$ | (–1, 1) |
| 3 | $3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 1$ | (3, 1) |
| –3 | $(-3)^2 - 2 \cdot (-3) - 2 = 13$ | (–3, 13) |
| 5 | $5^2 - 2 \cdot 5 - 2 = 13$ | (5, 13) |




Polynomifunktion kuvaaja on toisen asteen käyrä, jota sanotaan **paraabeliksi**.

Koska polynomi $x^2 - 2x - 2$ on toista astetta, sen määräämää funktiota kutsutaan toisen asteen funktioksi.

**Toisen asteen polynomifunktion lauseke** on muotoa $P(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a \neq 0$, $b$ ja $c$ ovat reaalilukuja. Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja on paraabeli.

**ESIMERKKI 2**

Vilma heittää palloa. Pallon korkeutta maan pinnasta voidaan likimain kuvata polynomifunktiolla $F(x) = -0{,}25x^2 + x + 2$, missä $x$ on kulunut aika sekunteina. Piirrä funktion kuvaaja koordinaatistoon ja selvitä sen avulla,

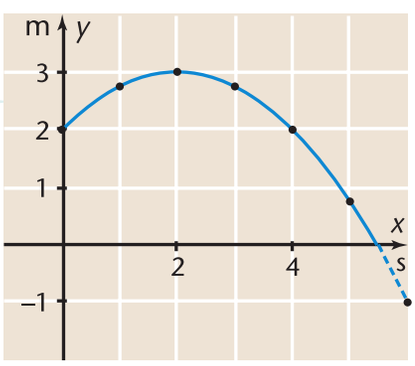
a) mikä on pallon korkeus, kun heitosta on kulunut 3 sekuntia
b) mikä on pallon korkeus heittohetkellä
c) milloin pallo on korkeimmalla
d) milloin pallo osuu maahan.

**RATKAISU**

Pallon korkeus riippuu ajasta $x$. Pallon korkeus saadaan laskemalla funktion arvo kyseisellä hetkellä eli pallon korkeus on piirrettävän pisteen $y$-koordinaatti. Lasketaan taulukkoon muutamia pisteitä ja piirretään funktion kuvaaja.

| $x$ | $F(x) = -0{,}25x^2 + x + 2$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | $F(0) = -0{,}25 \cdot 0^2 + 0 + 2 = 2$ | (0, 2) |
| 1 | $F(1) = -0{,}25 \cdot 1^2 + 1 + 2 = 2{,}75$ | (1; 2,75) |
| 2 | $F(2) = -0{,}25 \cdot 2^2 + 2 + 2 = 3$ | (2, 3) |
| 3 | $F(3) = -0{,}25 \cdot 3^2 + 3 + 2 = 2{,}75$ | (3; 2,75) |
| 4 | $F(4) = -0{,}25 \cdot 4^2 + 4 + 2 = 2$ | (4, 2) |
| 5 | $F(5) = -0{,}25 \cdot 5^2 + 5 + 2 = 0{,}75$ | (5; 0,75) |
| 6 | $F(6) = -0{,}25 \cdot 6^2 + 6 + 2 = -1$ | (6, –1) |

Paraabelista näkyy vain osa, koska aika $x$ ei voi saada negatiivisia arvoja eli $x \geq 0$.




a) Kun heitosta on kulunut 3 s, pallon korkeus on noin 2,8 m.

b) Heittohetkellä aikaa on kulunut 0 s. Pallo on siis Vilman kädessä 2,0 metrin korkeudella.

c) Kuvaajasta nähdään, että pallo on korkeimmalla, kun heitosta on kulunut 2 s. Pallon on tällöin 3,0 metrin korkeudella.

d) Pallo osuu maahan kohdassa, jossa pallon korkeus on 0 m. Tässä kohdassa paraabeli leikkaa $x$-akselin. Pallo osuu maahan, kun heitosta on kulunut 5,5 s.

**VASTAUS** a) 2,8 m b) 2,0 m c) 2 s d) 5,5 s

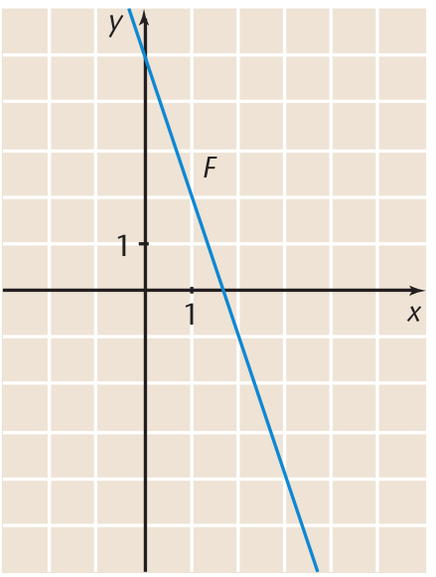
# Tehtäviä

**Ensimmäisen asteen polynomifunktio**

9. Piirrä funktion kuvaaja.

a) $P(x) = 4x - 3$ b) $R(x) = -x + 5$ c) $P(x) = 2 - 2x$

10. Päättele funktion $F$ kuvaajasta, mitä on
a) $F(2)$
b) $F(3)$
c) $F(0)$.




11. Päättele funktion $F$ kuvaajasta, millä $x$:n arvolla
a) $F(x) = 0$
b) $F(x) = 2$
c) $F(x) = -3$.

12. Matematiikan kokeen arvosanan ja pistemäärän välillä vallitsi lineaarinen riippuvuus. Kun opiskelijan saama pistemäärä oli $x$, arvosanaa voitiin mallintaa funktiolla $P(x) = 0{,}2x + 4$. Piirrä funktion kuvaaja ja arvioi kuvaajasta,
a) minkä arvosanan saa 25 pisteellä
b) mikä pistemäärä tuottaa korkeimman arvosanan
c) millä pistemäärällä saa arvosanan 7?

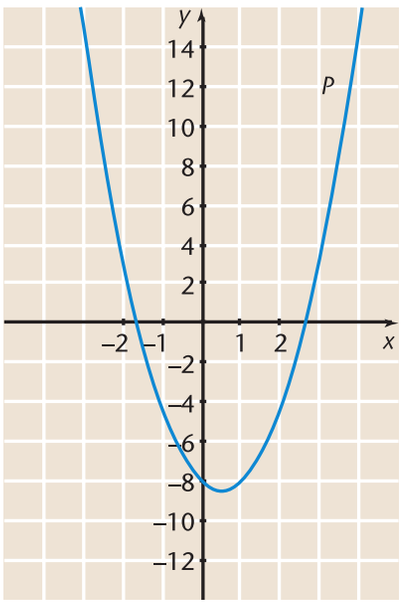
13. Piirrä funktioiden $R(x) = -4x + 1$ ja $P(x) = 2x$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Määritä kuvaajien leikkauspiste yhden desimaalin tarkkuudella.

14. Ensimmäisen asteen polynomifunktiosta $F$ tiedetään, että $F(2) = 5$ ja $F(5) = 1$. Piirrä funktion kuvaaja. Määritä kuvaajasta yhden desimaalin tarkkuudella
a) $F(0)$
b) $F(-2)$
c) se muuttujan $x$ arvo, jolla $F(x) = 8$.

**Toisen asteen polynomifunktio**

15. Piirrä funktion kuvaaja.
a) $P(x) = x^2 - 3x$ b) $P(x) = 1 - x^2$

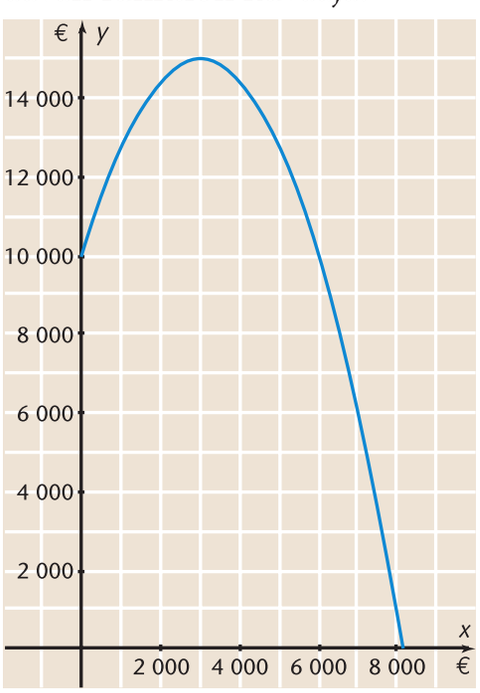
16. Päättele funktion $P$ kuvaajasta, mitä on
a) $P(0)$
b) $P(2)$
c) $P(-2)$.




17. Päättele funktion $P$ kuvaajasta, millä $x$:n arvolla
a) $P(x) = 0$
b) $P(x) = 2$
c) $P(x) = -7$.

18. Piirrä funktioiden $P(x) = x^2 - 2x - 1$ ja $Q(x) = -x^2 + 3x - 2$ kuvaajat samaan koordinaatistoon. Määritä paraabelien leikkauspisteet yhden desimaalin tarkkuudella.

19. Yrittäjä teetti tutkimuksen mainonnan vaikutuksesta myyntivoittoon. Tutkimuksessa selvisi, että voiton ($y$) riippuvuutta mainontaan sijoitetuista euroista ($x$) voitiin tietyllä välillä mallintaa toisen asteen polynomifunktiolla. Tiettyyn rajaan asti mainonta lisäsi voittoa, mutta sitten mainonnan kustannukset alkoivat syödä voittoa. Ohessa on voittoa kuvaavan funktion kuvaaja.
a) Kuinka paljon voittoa saadaan, jos ei mainosteta lainkaan?
b) Millä sijoituksella saadaan suurin voitto?



# Korkeamman asteen yhtälö

Jos polynomiyhtälössä tuntemattoman asteluku on vähintään kolme, yhtälöä kutsutaan **korkeamman asteen yhtälöksi**. Lyhyessä matematiikassa käsiteltävistä korkeamman asteen yhtälöistä voi useimmiten ottaa tuntemattoman yhteiseksi tekijäksi. Tämän jälkeen yhtälön voi ratkaista tulon nollasäännön avulla.

**ESIMERKKI 1** Ratkaise yhtälö $x^3 - x^2 - 2x = 0$.

**RATKAISU**

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0$

Otetaan tuntematon $x$ yhteiseksi tekijäksi.

Tulon nollasäännön mukaan

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{tai} \quad x = \frac{1-3}{2} = -1$$

**VASTAUS** $x = -1$, $x = 0$ tai $x = 2$

## Tehtäviä

20. Ratkaise yhtälö.
a) $x^3 - 4x = 0$ b) $4x^3 + 6x^2 = 0$

21. Ratkaise yhtälö.
a) $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$ b) $2x^3 + 2x^2 = 264x$

22. Ratkaise yhtälö.
a) $x^3 + x^2 - 30x = 0$ b) $2x^3 + 36x^2 = -162x$

23. Määritä vakio $k \neq 0$ siten, että kolmannen asteen yhtälöllä $k^2x^3 - 2k^3x^2 - 8kx = 0$ on yhtenä juurena $x = -2$.

# Vastauksen tarkkuus

Luvun tarkkuus voidaan ilmoittaa merkitsevien numeroiden tai desimaalien lukumäärällä. Desimaaliluvussa merkitseviä numeroita ovat kaikki muut numerot paitsi luvun alussa olevat nollat. Kokonaisluvussa merkitseviä numeroita ovat kaikki muut numerot paitsi luvun lopussa olevat nollat.

| | |
|---|---|
| Luvussa 500 on | **yksi merkitsevä numero.** |
| Luvussa 102 on | **kolme merkitsevää numeroa.** |
| Luvussa 0,050 on | **kaksi merkitsevää numeroa** ja kolme desimaalia. |
| Luvussa 1,01 on | **kolme merkitsevää numeroa** ja kaksi desimaalia. |
| Luvussa 100,0 on | **neljä merkitsevää numeroa** ja yksi desimaali. |

Joissakin tapauksissa kokonaisluvun lopussa olevat nollat voivat olla merkitseviä numeroita.

| | |
|---|---|
| Juusolla on rahaa **10** €. | Jonnan kynän pituus on **1**0 cm. |
| Nolla merkitsevä eli **kaksi** merkitsevää numeroa. | Nolla ei ole merkitsevä eli **yksi** merkitsevä numero. |

Pyöristysvirheiden välttämiseksi on reaaliluvuilla laskettaessa käytettävä joko tarkkoja arvoja tai riittävän tarkkoja likiarvoja. Lisäksi vastaus tulee antaa oikealla tarkkuudella.

Jos tehtävässä on vain yhteen- ja vähennyslaskuja, lopullinen vastaus pyöristetään epätarkimman lähtöarvon **desimaalien mukaan**. Epätarkimmalla lähtöarvolla tarkoitetaan sitä lukua, jossa on vähiten desimaaleja.

Muussa tapauksessa pyöristys tehdään yleensä epätarkimman lähtöarvon **merkitsevien numeroiden** mukaan. Epätarkin lähtöarvo on tällöin se luku, jossa on vähiten merkitseviä numeroita. Vastauksen ilmoittamisessa on aina kuitenkin mietittävä vastauksen järkevyyttä.

**Esimerkki 1** Ilmoita laskutoimitusten tulos oikealla tarkkuudella.

a) $2{,}56\text{ m} + 1{,}4\text{ m} - 0{,}05\text{ m}$ b) $3\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} \cdot 0{,}53\text{ cm}$

**Ratkaisu**

a) $2{,}56\text{ m} + 1{,}4\text{ m} - 0{,}05\text{ m} = 3{,}91\text{ m} \approx 3{,}9\text{ m}$
Epätarkin lähtöarvo on 1,4 m, joten vastaus ilmoitetaan yhdellä desimaalilla.

b) $3\text{ cm} \cdot 1{,}5\text{ cm} \cdot 0{,}53\text{ cm} = 2{,}385\text{ cm}^3 \approx 2\text{ cm}^3$
Epätarkin lähtöarvo 3 cm, joten vastaus ilmoitetaan yhdellä merkitsevällä numerolla.

**Vastaus** a) 3,9 m b) $2\text{ cm}^3$

**Esimerkki 2** Laske lausekkeen arvo ja pyöristä merkitsevien numeroiden mukaan.

a) $3{,}2 \cdot \sqrt{7{,}1} - (-\sqrt{11{,}05})$ b) $|-\sqrt{2{,}85}| + \sqrt{5{,}0} : 2{,}1$

**Ratkaisu**

a)
$$\begin{aligned} &3{,}2 \cdot \sqrt{7{,}1} - (-\sqrt{11{,}05}) \\ &= 3{,}2 \cdot \sqrt{7{,}1} + \sqrt{11{,}05} \\ &= 11{,}850... \\ &\approx 12 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} &|-\sqrt{2{,}85}| + \sqrt{5{,}0} : 2{,}1 \\ &= \sqrt{2{,}85} + \sqrt{5{,}0} : 2{,}1 \\ &= 2{,}752... \\ &\approx 2{,}8 \end{aligned}$$

**Vastaus** a) 12 b) 2,8

# Tehtäviä

24. Kuinka monen merkitsevän numeron tarkkuudella on ilmoitettu
a) 1000 b) 0,02304 c) 12,040
d) 10,1 e) 23,01700 f) −10,001?

25. Laske ja ilmoita oikealla tarkkuudella.
a) $0{,}05\text{ g} + 8{,}9\text{ g} - 1{,}0\text{ g}$ b) $2{,}5\text{ dm} \cdot 1{,}62\text{ dm}$

26. Lauttaan voidaan lastata enintään 825 000 kg:n paino. Kuinka monta autoa lautalle voidaan ottaa, jos auton keskipaino on 1300 kg?

27. Suomen väkiluku on noin 5,1 miljoonaa. Jos lautasellinen kaurapuuroa maksaa 0,12 €, kuinka paljon Suomen valtiolle maksaisi kustantaa aamupuurot kaikille asukkaille?

28. Laske ja anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
a) $|\sqrt{7{,}02} - \sqrt{10}| - (-\sqrt{5{,}7})$ b) $4{,}3 \cdot \sqrt{5{,}6} + \sqrt{4} : 7$

# Promille

Aiemmin sovittiin, että prosentti tarkoittaa sadasosaa. vastaavasti sovitaan, että **promille** tarkoittaa tuhannesosaa.

**Promille**

$$1\,‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

ESIMERKKI 1

Etanoli sekoittuu ihmisen kehon nesteisiin melko tasaisesti. Tähän perustuu esimerkiksi se, että verestä voidaan mitata alkoholin määrä elimistössä. Kun verrataan etanolin määrää koko elimistön nesteiden määrään, saadaan selville henkilön humaltumisaste, joka ilmoitetaan promilleina. Nesteitä miehen painosta on n. 70 %. Mikä on 50 kg painavan miehen humaltumisaste, kun hän juo puolen litran pullon siideriä, jossa on 4,7 % alkoholia?

RATKAISU

50 kg painavan miehen nesteiden määrä elimistössä on
$0{,}7 \cdot 50\text{ kg} = 35\text{ kg}$.

Puoli litraa siideriä painaa noin 0,5 kg eli pullossa on etanolia
$0{,}047 \cdot 0{,}5\text{ kg} = 0{,}0235\text{ kg}$.

Siiderin juomisen jälkeen nesteiden määrä elimistössä on
$35\text{ kg} + 0{,}5\text{ kg} = 35{,}5\text{ kg}$.

Alkoholin määrä elimistössä on siis

$$\frac{0{,}0235\text{ kg}}{35{,}5\text{ kg}} = 0{,}000661\ldots \approx 0{,}7\,‰.$$

VASTAUS

Humaltumisaste on noin 0,7 ‰.

# Tehtäviä

29. Kuinka monta promillea on

a) $\frac{7}{1000}$ b) $\frac{6}{100}$ c) 30 % d) 0,2 %?

30. Kotiviinin alkoholipitoisuus oli n. 15 %. Antti, jonka massa on 85 kg, nautti viiniä 5 dl.
   a) Kuinka monta promillea alkoholia viinissä oli?
   b) Laske Antin humaltumisaste, kun nesteiden osuus miehen painosta on 70 %.

31. Henkilön, jonka massa on 75 kg, veren seerumissa on 0,59 grammaa kaliumia. Henkilön painosta seerumin osuus on 4,8 %. Kuinka monta promillea seerumista on kaliumia?

# Tehtävien vastaukset

## 1.1 Lukujoukot ja laskutoimitukset

1. a) 5 b) $-7{,}5$
   c) $\frac{3}{8}$ d) $-\pi$

2. a) $\frac{3}{4}$ b) $-2$
   c) $-\frac{8}{5}$ d) $-\frac{1}{7}$

3. a) $1\frac{5}{9}$ b) 0,006
   c) 3 d) $-\pi$

4. a) $25, -\frac{4}{9}$ b) $-\frac{1}{25}, \frac{9}{4}$
   c) $25, \frac{4}{9}$
   d) $\sqrt{-25}$ ei määritelty,
   $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

5. a) 2,45
   b) ei määritelty
   c) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

6. a) 3
   b) ei määritelty
   c) $-5$

7. a) 1 b) $-4$
   c) $-3$ d) $-5$

8. a) 7 b) $2\pi + 7$

9. a) 14 b) 16

10. a) $a+1, a+2, a+3$
    b) $a-1, a-2, a-3$

11. 7 ja 11

12. a) $5 \cdot 7$ b) $3 \cdot 7$
    c) $2 \cdot 5 \cdot 5$

13. a) $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$,
    $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
    b) 2, 3 ja 6

14. 2, 3, 4, 6 ja 12

15. a) 0 b) $-8$
    c) $-12$

16. a) $-9$ b) $-20$
    c) $-7$

17. a) $-4$ b) 5
    c) $-2401$

18. a) $-25$ b) 11,2

19. a) 5000 b) 1400

20. a) 28 b) 28

21. a) 18 b) 240

22. a) 0 b) $\frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$
    c) 6

23. a) $\frac{3}{8}$ b) $\frac{3}{8}$

24. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
    b) $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
    c) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

25. a) 21 b) 19

26. a) 45 b) 15

## 1.2 Murtoluvuilla laskeminen

27. a) 5
    b) $-\frac{15}{2} = -7\frac{1}{2}$

28. a) $\frac{10}{12}, \frac{7}{12}$ b) $\frac{56}{96}, \frac{224}{96}$
    c) $\frac{4}{6}, \frac{39}{6}$

29. a) $2\frac{2}{5}, -2\frac{2}{3}, 3\frac{3}{4}$
    b) $\frac{9}{2}, -\frac{79}{10}, \frac{287}{46}$

30. a) 1 b) $-1$
    c) $-8\frac{3}{11}$

31. a) $2\frac{1}{2}$ b) $4\frac{23}{33}$
    c) $-2\frac{2}{3}$

32. a) $\frac{3}{4}$ b) $5\frac{1}{2}$
    c) $\frac{9}{10}$

33. a) $-\frac{14}{33}$ b) $\frac{5}{12}$
    c) $23\frac{3}{7}$

34. a) $1\frac{1}{21}$ b) $-\frac{16}{39}$
    c) $\frac{7}{32}$

35. a) $-\frac{3}{5}$ b) $1\frac{2}{3}$
    c) $\frac{3}{8}$

36. a) $2\frac{9}{28}$ b) $-1\frac{5}{28}$
    c) 1 d) $\frac{16}{49}$

37. a) $3\frac{1}{4}$ b) $1\frac{4}{9}$

38. a) $3\frac{3}{5}$ b) $-28$
c) $3\frac{8}{15}$

39. a) $4\frac{1}{2}$ b) $-\frac{11}{12}$
c) $-2\frac{23}{36}$

40. a) $\frac{14}{15}$ b) $\frac{2}{7}$

41. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{2}{7}, \frac{a-b}{a+b}=\frac{7}{2}$

42. a) $\frac{32}{20}, -\frac{7}{20}$ b) $\frac{28}{39}, \frac{91}{39}$
c) $\frac{4}{34}, \frac{51}{34}$

43. a) $2\frac{11}{20}$ b) $-\frac{3}{4}$
c) 1 d) $\frac{2}{19}$

44. a) $2\frac{5}{6}$ b) $-14\frac{7}{9}$
c) $1\frac{8}{9}$

45. a) $\frac{12}{47}$ b) $\frac{12}{17}$
c) $\frac{144}{799}$

## 1.3 Potenssien laskusäännöt

46. a) $7^3 = 343$
b) $(-5)^3 = -125$
c) $-5^3 = -125$
d) $a^2$ e) $9a^2$
f) $-a^2$

47. a) 2187 b) $-2187$
c) 729 d) 729
e) 0

48. a) $-25$ b) $-3\frac{3}{4}$
c) 9 d) $\frac{3}{4}$

49. a) $x^7$ b) $a^3b^4$
c) $y^5$ d) $x^2$

50. a) $16a^4$ b) $-27x^3y^3$
c) $\frac{4}{25}$ d) $\frac{16x^4}{81}$

51. a) $y^{10}$ b) $x^{36}$
c) $s^6$

52. a) 64 b) 512
c) $-512$ d) $-64$

53. a) $3a^3$ b) $9x^4$
c) $36y^6$

54. a) 190 000 b) 2500
c) $6\frac{1}{4}$ d) $a^{25}$
e) 25 f) $x^{24}$

55. a) $144a^3$ b) $-1$

56. a) $-2$ b) 3
c) $\frac{1}{18}$ d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{4}{9}$

57. a) $\frac{1}{a^4}$ b) $\frac{1}{a^7}$
c) $a^7$ d) $k^5$

58. a) $-\frac{a^3}{64}$ b) 1
c) $\frac{2}{3t^6}$ d) $\frac{21}{5t^2}$
e) $-\frac{125}{216}$ f) $\frac{1}{16a^8}$

59. a) $x^7$ b) $a^{20}b^{28}$
c) $-1$

60. a) 1 b) 0,0625
c) 50

61. a) 5 b) $\frac{4}{3}$

62. $\frac{1}{27}$

63. a) $2^3 = 8$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
d) $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$

64. a) $\frac{1}{3}$ b) 2
c) 84 d) 4

65. a) $c^{10}$ b) $t^3$
c) $16x^4y^{10}$ d) $7\frac{58}{81}$

66. a) 140 b) $2t^2$
c) $\frac{64}{a^7}$ d) $\frac{5}{2k^4}$

67. a) $a^5$
b) $a^{-1}b^2 = \frac{b^2}{a}$

## 2.1 Lauseke ja laskutoimitukset

68. a) 11 b) 19

69. a) 0 b) $-20$
c) $-2\frac{3}{4}$

70. a) 10 b) 45
c) 6

71. a) 37,5 m
b) kasvaa 87,5 m

72. a) $-3x + 4$
b) $2x + 5$
c) $-4x^2 + 4x$

73. a) $-6y^3 - y$
b) $2y + 3$
c) $2y$

74. a) $2x+\frac{3}{2}a$ b) $-\frac{3}{2}x-3$
c) $15x^3-5x^2$

75. 997 001 001

76. a) $2x^2-8x-7$
b) $2x-1$

77. $-2x^2-4x$

78. a) $20x-22$ b) 178

79. a) $21x+6$ b) $10-15x$
c) $-4x+9$

80. a) $18x-30$ b) $28p+14$
c) $6k-24$

81. a) $10x+15$
b) $-3a^3+12a^2$
c) $-40a^5+30a^4$

82. a) $2(600+x)=2x+1200$
b) 900 €

83. a) $-x$ b) $-x$
c) $x$

84. a) $6x+3$ b) $3y-4$
c) $-a+3$

85. a) $2t+1$ b) $4x-3$
c) $-3x+4$

86. a) $3a^2-a+4$
b) $-2s+\frac{1}{2}$
c) $-4y^2-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$

87. a) $-3x^2+9$
b) $-3z^3-4z+9$

88. a) $-34$ b) $-48$
c) $-4\frac{2}{3}$

89. a) $x^3+3x-11$
b) $7x^2+8x-2$

90. a) $36x-12$
b) $-15x+3$
c) $6a^2-8a$

91. a) $2x+6$ b) $3-x$
c) $-2y^3+3y$

92. a) $A(x)=70+5x$,
$B(x)=12x$
b) kuntosalia A

## 2.2 Polynomi

93. a, c, d, e, f, g

95. a) $Q(3)=8$

96. $-x^2+2x-4$

97. a) $5x-7$ b) $-3x+3$
c) $-1$

98. a) $7x^2-5x-2$
b) $3x^2+x+16$

99. a) $2x^2+5x+3$
b) $-2x^2+3x-3$

100. $R(a)=-8a^2+11a-5$,
$R(-2)=-59$

101. a) $12a^2$ b) $36x^5$
c) $-16x^3$

102. a) $-20x^7$
b) $-6x^5+12x^4-10x^3$

103. a) $5a^3-15a^2$
b) $3x^3+12x^2-6x$

104. a) $2x^2+7x+6$
b) $5x^3-16x^2+3x$

105. a) $6x^2+23x+20$
b) $-4x^2+10x-4$

106. a) $4x^3-4x^2+7x-3$
b) $-x^3-3x^2+22x-12$

107. a) $6x^4-15x^3+x^2$
$-10x-2$
b) $x^2+4x+4$

108. a) $x^2-8x+16$
b) $9x^2-30x+25$

109. a) $-2x^2+16x-12$
b) $-6x^3-27x^2+15x$

110. a) $9x^2+3x$
b) $4x^2+20x+4$

111. a) $x^4-16y^4$
b) $-x^2+x+2$

112. a) $21x^2-21$
b) $-10x^2+29x-9$

113. a) 0 b) 0
c) 0

114. a) $x^3+3x^2+3x+1$
b) $x^{3m-3}+x^{4m}-x$

116. a) $2x+2y+14$ (cm)
b) $xy+3x+4y+12$ (cm)

117. a) $(6500-150x)(8+x)$
$=-150x^2+5300x+52000$
b) 68 712,50 €

118. a) $250-x$
b) $A(x)=-x^2-250x$
c) 13 600 m$^2$

119. $4ab$, tarkka arvo 4

120. a) $-9x^5y^7$
b) $-6x^3y-6x^2y^2+6xy^4$

121. a) $3x^2 + 22x + 7$
b) $4x^2 - 1$
c) $4x^2 - 13x + 3$

122. a) $9x^2 - 12x + 4$
b) $4x^3 + 10x^2 - 6x$
c) $2x^3 - 2x^2 + 3x$

123. $m(x) = 60\,000 + 700x - 10x^2$, 60 poimijaa kerää 66 000 kg marjoja

## 2.3 Murtolausekkeita

124. a) $x$ b) 1
c) $x^{3a-3}$ d) $x^{13}$

125. a) $2x^3 + 6$
b) $-3a^2 + a - 4$

126. a) $\frac{5a}{6}$ b) $\frac{2x-5}{3}$

127. a) $\frac{3x+7}{4}$
b) $\frac{-3a+17b}{20}$

128. $\frac{13x-12y}{6}$

129. a) $\frac{a+2}{a+1}$ b) $\frac{6-3x}{2x}$

130. a) $\frac{-a^2+2a+1}{2a}$
b) $\frac{-2x+1}{x(x-1)} = \frac{-2x+1}{x^2-x}$

131. a) $\frac{1}{3}$ b) 1
c) $x^{2n}$

132. $a^2$

133. $\frac{3}{2}$

134. a) 12 b) $8x^2$

135. a) $\frac{2}{3}$ b) 2

136. a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3x}{2}$

137. a) $2(a+2)$
b) $6(2b-1)$
c) $3(x-2y)$

138. a) $5(5x+6)$
b) $x(6y-7)$
c) $x(2x+3)$

139. a) $10a(2b+1)$
b) $3xy(1-5y)$
c) $2ab(a+4b)$

140. a) $\frac{x+2}{x-3}$ b) $\frac{2}{5}$

141. a) 2 b) $-3$

142. $\frac{2}{3}$

143. a) $\frac{18t+9}{6} = \frac{6t+3}{2}$
b) $\frac{15s-13}{30}$

144. a) $\frac{2}{x^2-1}$ b) 1

145. a) 2 b) 4

146. a) $9(4x+3)$
b) $x(5y-8)$
c) $x(x-4)$

147. $\frac{8}{3}$

## 3.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

148. a) $x = 2$ b) $x = -6$

149. a) $x = -3$ b) $x = 1$

150. a) $a = -\frac{8}{9}$ b) $c = \frac{5}{8}$

151. a) $x = -3$ b) $x = 1$

152. a) ei ratkaisua
b) ratkaisuna kaikki luvut

153. a) ei ratkaisua
b) $x = \frac{11}{8}$

154. $a = 2$

155. $k = -\frac{3}{5}$

156. a) 5600 kpl
b) 2 snt

157. 31, 32, 33

158. Lilli 6 v, Petra 24 v

159. 1,4 km/h

160. 3

161. a) $x = 6$ b) $x = \frac{4}{21}$

162. a) $x = -\frac{3}{11}$ b) $x = \frac{1}{3}$

163. a) ratkaisuna kaikki luvut
b) $x = 1$

164. a) $x = 2$
b) $x = -1\frac{9}{10}$

165. 1059 €

166. 110 €

167. $a = -1\frac{1}{8}$

168. $p = 1\frac{1}{7}$

169. a) $x = 2$ b) $x = -\frac{2}{3}$

170. a) $x = -3$
b) ei ratkaisua

171. korkeus 6 cm, kanta 9 cm

172. 28 oppilasta

173. $a = -12$

## 3.2 Vaillinainen toisen asteen yhtälö

174. a) $x = -1$ tai $x = \frac{1}{2}$
b) $x = 0$, $x = 4$ tai $x = -2$

175. a) $x = \frac{1}{3}$ tai $x = 4$
b) $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{2}$

176. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{3}$
b) $x = 0$ tai $x = 3$
c) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

177. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{6}$
c) $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{2}$

178. a) $x = 0$ tai $x = \frac{3}{2}$
b) $x = 0$ tai $x = 3$

179. a) $x = -1$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

180. a) $x = 0$ tai $x = 1$
b) $x = 1$ tai $x = \frac{1}{3}$

182. a) $x = 0$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

183. $x = -7 + \sqrt{3}$ tai $x = -7 - \sqrt{3}$

184. a) 4 m korkeudella
b) 4 s kuluttua

186. Kun $p = 6$, toinen juuri on $x = 0$.

187. a) $x = \pm 9$
b) $x = \pm\sqrt{3}$
c) ei ratkaisua

188. a) $x = \pm 1$ b) $x = \pm 4$
c) ei ratkaisua

189. a) $x = \pm 2$ b) $x = \pm 1$
c) $x = \pm\sqrt{2}$

190. a) $x = \pm\sqrt{7}$
b) $x = \pm 3$
c) ei ratkaisua

191. a) $s = \pm 10$
b) $k = \pm\sqrt{20}$

192. a) ei ratkaisua
b) ei ratkaisua

193. a) $t = 0$ b) $t = \pm 3$
c) ei millään $t$:n arvolla

194. 6,9 m

195. 2,7 m · 2,7 m

196. 5,5 m · 5,5 m

197. a) $x = \pm\sqrt{2}$
b) ei millään $v$:n arvolla
c) $v = 0$

198. 1,3 m · 1,3 m

199. 0,80 m

200. a) $x = \pm 7$ b) $x = \pm 5$
c) $x = \pm\sqrt{5}$

201. a) $x = 1$ tai $x = -\frac{2}{3}$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$

202. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$
b) $x = 0$ tai $x = 1$
c) $x = 0$

204. 110 cm

## 3.3 Täydellinen toisen asteen yhtälö

205. a) $x = -1$ tai $x = 2$
b) $x = 1$ tai $x = 2$

206. a) $x = -2$ tai $x = 1$
b) $x = -5$ tai $x = 3$

207. a) $x = -1$ tai $x = 6$
b) $x = -2$ tai $x = 5$

208. a) $x = -4$ tai $x = 3$
b) $x = -5$ tai $x = -1$

209. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{7}$
b) $x = 0$ tai $x = 2$

210. a) $x = 3$ b) $y = -1$

211. a)
$x = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2} \approx -0{,}21$ tai
$x = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} \approx -4{,}79$

b)
$x = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \approx 2{,}73$ tai
$x = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} \approx -0{,}73$

212. a)
$x = \frac{-7 + \sqrt{17}}{4} \approx -0{,}72$ tai
$x = \frac{-7 - \sqrt{17}}{4} \cong -2{,}78$

b)
$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} \approx -0{,}23$ tai
$x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} \approx -1{,}43$

213. a) ei ratkaisua
b) $x=-3$ tai $x=2$

214. a) $x=1\frac{1}{2}$

b) $t=\frac{1}{2}$ tai $t=\frac{1}{3}$

215. a) $k=\frac{1}{2}$

b) $x=-4$ tai $x=2$

216. $x=-5$ tai $x=4$

217. $p=\frac{1}{2}$, toinen juuri $x=5$

218. a) $x=-1$
b) $x=-2$ tai $x=1$

219. $x=\frac{-4\sqrt{3}+8}{8}$
$=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+1\approx 0{,}13$ tai
$x=\frac{-4\sqrt{3}-8}{8}$
$=-\frac{1}{2}\sqrt{3}-1\approx -1{,}87$

220. Kun $r=1$,
$t=\frac{1}{2}$ tai $t=-\frac{1}{3}$.
Kun $r=2$,
$t=\frac{1}{2}$ tai $t=-\frac{1}{6}$

221. $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx -0{,}62$

222. a) $x=3$ tai $x=1$
b) $x=-\frac{1}{2}$ tai $x=5$

223. a) $s=-4$
b) ei ratkaisua

224. a) $x=-8$ tai $x=7$
b) $x=-3$ tai $x=1$

225. a)
$x=\frac{9+\sqrt{21}}{10}\approx 1{,}36$ tai
$x=\frac{9-\sqrt{21}}{10}\approx 0{,}44$

b)
$x=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\approx 0{,}30$ tai
$x=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\approx -3{,}30$

226. ei millään $t$:n arvolla

## 3.4 Toisen asteen yhtälön sovelluksia

227. 125 ja 126

228. 3 ja 8

229. 4, 5, 6 ja 7

230. 18 m ja 30 m

231. 0,25 m

232. 11 cm$^2$

233. 2,4 m tai 7,6 m

234. 12,4 cm

235. korkeus 7,8 cm ja leveys 5,8 cm

236. 15 €

237. korotus 2 € eli myyntihinta 5 €

238. 16,20 €

239. 6,8 m · 4,8 m

240. 7,0 m ja 4,0 m

241. 4 €

242. $-15$ ja 13 tai 15 ja 13

243. $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{2}$

## 4.1 Suhde ja verranto

244. a) 50:1 b) 1:200
c) 1:100 d) 5:9

245. a) 4:1 b) 4:5

246. a) 2:3 b) 1:6

247. 10 ja 25

248. $-12$ ja $-16$ tai 12 ja 16

249. kanta 8,3 cm, korkeus 14 cm

250. a) $x=\frac{1}{2}$ b) $x=2$
c) $x=-2$

251. a) $x=1$ b) $x=\frac{7}{8}$

252. a) $x=-12$
b) $x=-1$ tai $x=5$

253. a) $x=\pm 10$ b) $x=\pm 5$

254. a) $x=2$
b) ei ratkaisua

255. $k=\frac{5}{3}$

256. 188 cm

257. 9,7 cm

258. 9:16

259. a) $x=\frac{2}{9}$ b) $x=-5\frac{1}{2}$

260. a) $x=1$ tai $x=3$
b) $x=0$ tai $x=2$

261. a) $x = 1\frac{1}{2}$ tai $x = -2\frac{1}{2}$
b) $h = -2$ tai $h = \frac{4}{5}$

262. 5 ja 20

263. Kyösti 125 cm,
Maikki 150 cm

## 4.2 Suoraan ja kääntäen verrannolliset suureet

264. a) kääntäen verrannollisuus, matka 3 km
b) suoraan verrannollisuus, nopeus 80 km/h

265. 250 g

266. 5,8 kg

267. 50-vuotias

268. 2 h 7 min

269. 16 min

270. a) 30 min 30 s
b) 33 min 20 s

271. a) 144° b) 12°

272. 65 km/h

273. 7 pumppua

274. 1 h 20 min

275. 340 palstamillimetriä

276. keksi henkilöä lisää

277. 584 kpl

278. a) 14 km/h
b) 17 km/h

279. 41 min

280. a) 8,4 kg/dm$^3$
b) molemmat 1,5 kg

281. 4,8 l

282. 12 m päähän

283. 24 m$^2$

284. a) 380 € b) 4100 €

285. 24 lx

286. 80 km/h

## 5.1 Prosenttilaskennan perustilanteita

287. a) 33 % b) 4 %

288. a) 49 % b) 51 %

289. 5 %

290. a) 14 % b) 75 %

291. 9,3 %

292. 39 %

293. a) 22,5 b) 31,8

294. 0,7 litraa

295. liikkeestä A

296. veroa 442 €,
omaan käyttöön 1258 €

297. 49,60 €

298. 0,22 %

299. 139,97 €

300. 20 min

301. 91

302. omenoita 5600 kg,
banaaneja 7600 kg

303. Vain lankapuhelin 20,2 %:lla, lankapuhelimien käyttäjistä 73,4 %:lla myös matkapuhelin

304. a) kasvanut 20 %
b) alentunut 65 %
c) alentunut 99,7 %
d) kasvanut 150 %

305. a) 50 % b) 25 %

306. a) 75 % b) 1650 %

307. a) 2,5 %-yksikköä
b) 8 %

308. a) 0,5 %-yksikköä
b) 31 %

309. 14 %

310. 24 %

311. ei halkea

312. 11 000 kJ

313. 270 mg

314. laski 8 %

315. 39 %

316. tavaratalosta

317. 23 %

318. laskivat 9,1 %

319. a) 32,5 % b) 67,5 %

320. 2,40 €

321. 880 €

322. 32 %

323. 4,9 %

## 5.2 Prosenttiyhtälöitä

324. 240

325. 58 kg

326. 81 km/h

327. 5,6 tonnia

328. 32 g

329. 1,09 €

330. 50 000 €

331. 13,73 €

332. 665 €

333. 17,76 €

334. 170 €

335. 7,5 litraa

336. 35 %

337. 29 %

338. a) 21 % b) 11 %

339. 41 %

340. 30 %

341. 9 %

342. 83 %

343. 19 %

344. 953 €

345. Liisa 47 pistettä,
Maija 39 pistettä

346. 10 000 €

347. 8,5 %

348. 13 %

## Kertausosa

1. a) 4 b) $-\frac{5}{4}$

2. a) 10 b) 16

3. a) $-4$ b) 1
c) 9

4. a) 8000 b) 3300

5. a) $-\frac{11}{12}$ b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{4}{3}$

6. a) $-2\frac{3}{4}$ b) 4
c) $\frac{4}{3}$

7. a) $-1\frac{5}{8}$ b) 10

8. a) $x^{17}$ b) $t^{20}$
c) $x^5$ d) $16x^{12}y^8$

9. a) 16 b) $\frac{1}{32}$

10. a) $-2\frac{2}{3}$ b) $-1$
c) $\frac{256}{49}$

11. a) 100 b) $a^{m+2}$

12. 12

13. a) $-5x^2 + 12x$
b) $7a - 6b + 2$

14. $-4y^2 + 6y$

15. a) $12x - 18$ b) $15x - 12$
c) $-8y^2 + 14y$

16. a) $3x + 6$
b) $-x^2 + 2x + 3$

17. a) $9x - 9$
b) $20x^2 - 39x + 7$

18. a) $-15x^3 + 20x^2 - 10x$
b) $-10x^2 + 24x - 8$
c) $6x^3 - 16x^2 + 2$

19. a) $-5x^2 + 16x - 3$
b) $-24x^2 + 4x + 8$

20. a) $-3x^2 + 8x - 3$
b) $x^2 - 4x - 4$

21. a) 91 € b) 214,50 €

22. a) $\frac{4x-1}{2x-1}$ b) $\frac{7}{2x}$

23. a) $\frac{3}{2x+2}$
b) $\frac{4x+10}{2x-3}$

24. a) $8x(3x - 1)$
b) $3ab(2a - b)$

25. a) $2x^2 - 5x - 4$
b) $\frac{3x}{2} = \frac{3}{2}x$

26. a) $x = 4$ b) $x = \frac{1}{13}$

27. a) $x = -\frac{1}{8}$ b) $x = \frac{27}{10}$

28. a) 22 600 km
b) 15 300 km

29. a) $1200 + 28x$
b) 4 560 € c) 100 kpl

30. 11 kanaa ja 15 sikaa

31. a) $x = 0$ tai $x = -8$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{4}{3}$

32. a) $x = \pm 5$ b) $x = \pm 2$
c) ei ratkaisua

33. $x = 0$ tai $x = \frac{1}{6}$

34. a) $x = 3$ tai $x = -5$
b) $x = 7$

35. a) $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 1$
b) ei ratkaisua

36. a) $x = 1$ tai $x = 2$
b) $a = \frac{3}{4}$ tai $a = 2$

37. $a = 3$,
toinen ratkaisu $x = 3$

38. $x = -7$ tai $x = 8$

39. Rannan suuntainen sivu 18 m ja muut sivut 14 m tai rannan suuntainen sivu 28 m ja muut sivut 9 m.

40. 8 ja 10 tai −8 ja −10

41. 8 h

42. 9 ja 36

43. a) $x = \frac{5}{3}$ b) $x = \frac{9}{16}$

44. a) $x = \pm\sqrt{2}$
b) $x = -1$ tai $x = 5$

45. 300 m ja 400 m

46. 155 kpl

47. 79 kg

48. a) 50 min b) 60 %

49. kasvanut 14 %

50. a) 351 b) 35 %
c) 42 %

51. a) 0,6 b) 18 %

52. 110 ml

53. 15 %

54. 3225 €

55. laskee 4,5 %

56. 21

57. 204

58. 4,0 %

59. 3700 €

## 1. Harjoituskoe

1. a) $5\frac{1}{3}$ b) 1
c) $9\frac{2}{3}$

2. a) $\frac{a}{10}$ b) $8k^{18}$
c) $x^4$

3. a) $-x^2 + 5x + 11$
b) $3x^2 - 17x + 3$

4. a) $x = \pm 2$
b) $x = 0$ tai $x = 4$
c) $x = \pm 3$

5. a) 48 kalliimpia
b) 32 % halvempia

6. a) 2550 € b) 11,20 €

7. $(450 - 4x)(302 + x)$,
ei voi myydä hintaan 522 €.

8. 12 kpl

## 2. Harjoituskoe

1. a) $a^8$ b) $b^3$
c) $c^3$ d) 1
e) $-125e^3$ f) $\frac{81f^{12}}{16}$

2. a) $2\frac{2}{3}$ b) $20\frac{3}{100}$
c) $\frac{3}{4}$ d) $10\frac{2}{3}$

3. a) $\frac{x-2}{x-3}$ b) 1
c) $\frac{4}{3}$

4. a) $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{2}$
b) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$
c) $x = \pm 1$

5. a) $x = \frac{1}{6}$
   b) ei ratkaisua
   c) ratkaisuna kaikki reaaliluvut $x$

6. a) $x = \pm 2$
   b) $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{2}$
   c) $x = -3$ tai $x = 4$

7. a) 0,54 €
   b) 4 h 48 min

8. a) nousi 5,8 %
   b) 24,10 €

## 3. Harjoituskoe

1. a) $27k^3$ b) $-8a^3$
   c) $125x^{18}$ d) $a^8$
   e) $x^5$ f) $\frac{1}{4}x^2$

2. a) $H(x) = 52 + 0{,}2x$
   b) 122 €

3. a) $x = 0$ tai $x = \frac{1}{5}$
   b) $y = \frac{1}{2}$ tai $y = 2$
   c) $x = -6$

4. a) 7 b) 175 cm

5. 194 kPa

6. laskettava 15 %

7. 1,2 m

8. 6,75 €

## Ekstrat

1. d, c, a, b

2. a) 120
   b) −120 000
   c) 0,12
   d) 0,000 012

3. a) $7{,}065 \cdot 10^9$
   b) $1{,}2 \cdot 10^{-5}$
   c) $-7{,}065 \cdot 10^{-4}$

4. a) $10^{30}$ b) $10^{-93}$
   c) $10^{46}$ d) $3 \cdot 10^{60}$

5. 60 000 000-kertainen

6. a) 4 nm b) 7,6 MJ
   c) 0,3 Gs d) 2 ms
   e) 45 kg f) 6,4 µm

7. a) $2{,}0 \cdot 10^{-23}$ g
   b) $5{,}0 \cdot 10^{25}$ kpl

8. a) 6 600 €
   b) vuonna 2014 tai 2015

10. a) $F(2) \approx -1$
    b) $F(3) \approx -4$
    c) $F(0) \approx 5$

11. a) $x \approx 1{,}5$ b) $x \approx 1$
    c) $x \approx 2{,}5$

12. a) 9
    b) 30 pistettä
    c) 15 pistettä

13. (0, 2; 0, 3)

14. a) $F(0) \approx 7{,}7$
    b) $F(-2) \approx 10{,}3$
    c) $x \approx -0{,}3$

16. a) $P(0) \approx -8$
    b) $P(2) \approx -4$
    c) $P(-2) \approx 3$

17. a) $x \approx -1{,}5$ tai $x \approx 2{,}5$
    b) $x \approx 2{,}8$ tai $x \approx -1{,}9$
    c) $x \approx 1{,}5$ tai $x \approx -0{,}5$

18. (0, 2; −1,4) ja (2, 3; −0,4)

19. a) 10 000 €
    b) 3 000 €

20. a) $x = 0$ tai $x = \pm 2$
    b) $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{2}$

21. a) $x = 0$ tai $x = -1$
    b) $x = 0$, $x = -12$ tai $x = 11$

22. a) $x = 0$, $x = 5$ tai $x = 6$
    b) $x = 0$ tai $x = -9$

23. $k = 0$, $k = -2$ tai $k = 1$

24. a) 1 b) 4
    c) 5 d) 3
    e) 7 f) 5

25. a) 8,0 g b) 4,1 $\text{dm}^2$
    c) 5,7 $\text{m}^2$

26. 630

27. 610 000 €

28. a) 2,90 b) 10,5

29. a) 7 ‰ b) 60 ‰
    c) 300 ‰ d) 2 ‰

30. a) 150 ‰ b) 1,3 ‰

31. 0,16 ‰

# Hakemisto


## A
alkuluku 10
asteluku 45

## B
binomi 4

## E
eksponentti 25, 28, 29
ensimmäisen asteen yhtälö 62, 146
etuliitteet 142

## H
hyperbeli 100

## I
identtinen yhtälö 64
irrationaaliluvut 9
itseisarvo 10

## J
jakolasku 12, 20, 40, 55
juurrettava 10

## K
kantaluku 25
kertolasku 12, 20, 39, 47, 48, 55
kokonaisluvut 7
korkeamman asteen yhtälö 152
kymmenpotenssimuoto 141
käänteisluku 10
kääntäen verrannollisuus 100

## L
laskujärjestys 13, 26, 48
lauseke 36, 45, 54, 61
lausekkeen arvo 36
laventaminen 19
liitäntälaki 14
luonnolliset luvut 7

## M
merkitsevä numero 153
monomi 45
muistikaavat 145
murtolauseke 54
murtoluku 66, 91, 109, 140
murtolukujen laskusäännöt 55
murtolukumuoto 8, 19
muuttuja 36, 45
muuttujatermi 37, 44

## N
negatiivinen eksponentti 29
neliöjuuri 10, 74
nimittäjä 8, 19
nollas potenssi 28

## O
osamäärä 8, 28, 91, 107
osittelulaki 14, 39, 47, 56
osoittaja 8

## P
paraabeli 148
perusarvo 107, 120
polynomi 44, 54
polynomin asteluku 45
positiiviset kokonaisluvut 7
potenssikaavat 27, 47
potenssimerkintä 24, 25
potenssin arvo 25
promille 155
prosentti 107
prosenttikerroin 109, 113, 120, 122
prosenttiluku 109
prosenttiyksikkö 115
prosentuaalinen osuus 108

## R
rationaaliluvut 8
ratkaisukaava 79
reaaliluvut 9
ristiin kertominen 93

## S
samankantaiset potenssit 26
samanmuotoinen termi 37, 46
samanniminen termi 37, 46
samannimiset murtoluvut 19
sekaluku 19
sieventäminen 54
suhde 91, 97, 100, 107
suhteellinen osuus 8, 107
suora 98
suoraan verrannollisuus 97
supistaminen 19

## T
termi 44, 71, 74, 79
termin asteluku 45
toisen asteen yhtälö 64, 71, 148
trinomi 45
tulon nollasääntö 72
täydellinen toisen asteen yhtälö 71, 79

## V
vaihdantalaki 14
vaillinainen toisen asteen yhtälö 71
vakiotermi 44
vastalauseke 37
vastaluku 10
vastauksen tarkkuus 153
verranto 91, 97, 100, 120
vertailuarvo 109, 111
vähennyslasku 12, 20, 38, 46, 55

## Y
yhteenlasku 12, 20, 38, 46, 55
yhteinen tekijä 14, 19, 56, 72
yhtälö 61,64, 71, 79
yhtälön juuri 61
yhtälön ratkaiseminen 62
yhtälön ratkaisu 61